Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2010/2011
AL210 - Algebra 2: Gruppi, Anelli e Campi
Prof. F. Pappalardi
Tutorato 7 - 15 Novembre 2010
Tutore: Matteo Acclavio
www.matematica3.com

Esercizio 1.
Sia A anello e dimostrare che:

- $A[x]$ è un anello (con l'usuale prodotto e somma tra polinomi)
- $M_n(A)$ è un anello (rispetto la somma e il prodotto tra matrici)
- Sia $I \subseteq A$ ideale (dx o sx) allora $I[x]$ e $M_n(I)$ sono ideali (dx o sx) rispettivamente di $A[x]$ e $M_n(A)$.
- Se A è privo di zerodivisori allora lo è anche $A[x]$, ma non è vero per $M_n(A)$.

Esercizio 2.
Siano I e J due ideali di A anello commutativo, dimostrare che:

- IJ, $I + J$ e $I \cap J$ sono ideali di A
- $IJ \subseteq I \cap J$
- $(I \cup J) := \{\sum \alpha i + \beta j | \alpha, \beta \in A, \ i \in I, \ j \in J\}$ è un ideale
- $I + J = (I \cup J)$
- Se $I + J = A \Rightarrow IJ = I + J$

Si considerino in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ gli insiemi $n\mathbb{Z} := (n) = \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$:

- Dimostrare che $n\mathbb{Z}$ è un ideale $\forall n \in \mathbb{Z}$ e che $(n) = (-n)$.
- Determinare $(14) \cap (4)$, $(2) \cap (7)$, $(2) + (4)$, $(2) + (7)$, $(2)(7)$, $(7) + (4)$

Esercizio 3.
Sia $n \geq 2$ e $n = {p_1}^{e_1} .... {p_s}^{e_s}$ la sua fattorizzazione in numeri primi. Mostrare che $[a]_n \in Z_n$ è nilpotente se e soltanto se $p_1 ... p_s$ divide a

Esercizio 4.
Dimostrare che $(\mathcal{P}(S), \cup, \cap)$ è un anello commutativo. Dimostrare inoltre che $\mathcal{P}_f(S) := \{$ sottoinsiemi finiti di $S\}$ è un ideale di $\mathcal{P}(S)$

Esercizio 5.
Un elemento a di un anello si dice *idempotente* se $a^2 = a$.
Sia R è un anello commutativo, unitario e $a \in R$, mostrare che:

(a) Se a è nilpotente, allora a è uno zero-divisore;

(b) Se a è idempotente, allora $1 - a$ è idempotente;

(c) Se a è idempotente (diverso dall'unità) , allora a è uno zero-divisore;

(d) Sia $a \neq 0$, se a è nilpotente, allora a non è idempotente;

(e) Se a è uno zero-divisore, allora ab è uno zero-divisore $\forall b \in R$;

(f) Se a, b sono nilpotenti, allora $a + b$ è nilpotente;

(g) Se a è nilpotente, allora ab è nilpotente, per ogni $b \in R$;

(h) Se $u \in R$ è invertibile e a è nilpotente, allora $u + ab$ è invertibile, per ogni $b \in R$.

Dedurne che $Nil(R) := \{\text{elementi nilpotenti di } R\}$ è un ideale mentre $\mathcal{Z}(R) := \{\text{zerodivisori di } R\}$ no.