Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2010/2011
AL210 - Algebra 2: Gruppi, Anelli e Campi
Prof. F. Pappalardi
Tutorato 1 - 27 Settembre 2010
Tutore: Matteo Acclavio
www.matematica3.com

Esercizio 1.
Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono gruppi rispetto alla somma e al prodotto usuali (specificando eventuali proprietá mancanti)

- $A = \{n^3 \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $B = \{\frac{n^2}{m^2} \mid n, m \in \mathbb{N}, m \neq 0, \quad MCD(n, m) = 1\}$
- $C = \{\frac{n^3}{m^3} \mid n, m \in \mathbb{N}, m \neq 0, \quad MCD(n, m) = 1\}$

Esercizio 2.
Dato $(\mathbb{Z}_{15}, +)$ calcolare $o(x)$ $\forall x \in \mathbb{Z}_{12}$

Esercizio 3.
Determinare se $(\mathbb{Z}, \heartsuit)$ è un gruppo, dove:

- $x \heartsuit y = x - y$
- $x \heartsuit y = xy - y$
- $x \heartsuit y = xy - yx$

Esercizio 4.
Si considerino in $\mathbb{Z}_{18}$, $< \bar{3} >$ e $< \bar{2} >$. Dimostrare che $< \bar{3} > \cap < \bar{2} > = < \bar{6} >$ e dimostrare che $< \bar{2} >$ è il più piccolo sottogruppo contenete sia $\bar{4}$ e $\bar{6}$

Esercizio 5.
Sia $S = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e $\star : S \longrightarrow S$ t.c. $x \star y = xy + x + y$:

- Provare che $\star$ definisce un'operazione binaria su S
- Dimostrare che $(S, \star)$'e un gruppo. (individuando elemento neurto e inverso del generico elemento x)
- Mostrare perchè se definisco $\star$ in modo analogo su tutto $\mathbb{R}$, $(\mathbb{R}, \star)$ non è un gruppo

Esercizio 7.
Determinare l'ordine di tutti gli elementi di S_5.
Esercizio 6.
Date le seguenti permutazioni σ e $\tau \in S_{10}$, calcolare i prodotti dove necessario, decomporre in cicli disgiunti e calcolare la parità di σ, τ, $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, σ^2, $\sigma^2\tau$, τ^2, $\tau^2\sigma$.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 5 & 7 & 9 & 10 & 8 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 5 & 7 & 9 & 3 & 1 & 4 & 6 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$