

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009
AL1 - Algebra 1: Fondamenti
Prof. F. Pappalardi
Tutorato 9 - 11 Dicembre 2008
Elisa Di Gloria, Luca Dell'Anna
www.matematica3.com

Esercizio 1.

Trovare le eventuali soluzioni dei seguenti sistemi di congruenze:

$$\bullet \begin{cases} x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 5 \pmod{6} \\ x \equiv 6 \pmod{7} \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 5 \pmod{6} \\ x \equiv 5 \pmod{12} \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 2 \pmod{4} \\ x \equiv 3 \pmod{6} \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} x \equiv -1 \pmod{9} \\ x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv -2 \pmod{4} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} x \equiv 11 \pmod{19} \\ x \equiv 7 \pmod{8} \\ x \equiv 10 \pmod{6} \end{cases}$$

Esercizio 2.

Sia p un numero primo, $p > 3$ tale che $p + 2$ è primo. Provare che 12 divide $p + (p + 2)$.

Esercizio 3.

Trovare tutte le soluzioni in \mathbb{C} dell'equazione $x^{10} = 1$.

Esercizio 4.

Trovare in ciascuno dei seguenti casi una scelta per gli a_i tali che i seguenti sistemi non sono risolubili e una, non banale, per i quali lo sono.

$$\bullet \begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{5} \\ x \equiv a_2 \pmod{6} \\ x \equiv a_3 \pmod{12} \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{15} \\ x \equiv a_2 \pmod{11} \\ x \equiv a_3 \pmod{4} \\ x \equiv a_4 \pmod{6} \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{19} \\ x \equiv a_2 \pmod{8} \\ x \equiv a_3 \pmod{6} \end{cases}$$

Esercizio 5.

Usando il crivello di Eratostene, stabilire se i seguenti numeri sono primi: 167, 253, 137, 151, 1001

Esercizio 6.

Determinare, per $2 \leq m \leq 10$, la tavola additiva di $\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$.

Determinare inoltre, $\forall m$ come sopra, il gruppo degli invertibili $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$ e scriverne la tavola moltiplicativa.

Esercizio 7.

Scrivere una dimostrazione del fatto che $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$ se p è primo.

Esercizio 8.

Un fruttivendolo deve sistemare poco meno di un migliaio di arance sui suoi banconi, ma disponendole a gruppi di 3 gli avanzano 2 frutti, a gruppi di 4 gliene avanzano 3, a gruppi di 5 ne rimangono 4, a gruppi di 6 ne rimangono 5. Finalmente riesce a sistamarle a gruppi di 7. Quante sono le arance?

Esercizio 9.

Il nonno Mario ha tre nipotine, Adele, Bice e Clara, rispettivamente di 17, 16 e 4 anni. Il Nonno dice ad Adele: Per ottenere la mia età occorre un multiplo della tua più quella di Bice. Poi, rivolto a Bice, afferma: Per ottenere la mia età occorre un multiplo della tua età più quella di Clara. Infine dice a Clara: Sai che la mia età è proprio un multiplo della tua?

Qual è l'età di Nonno Mario?