Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009
AL1 - Algebra 1: Fondamenti
Prof. F. Pappalardi
Tutorato 7 - 27 Novembre 2008
Elisa Di Gloria, Luca Dell'Anna
www.matematica3.com

Esercizio 1.
Utilizzando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive, calcolare il MCD delle seguenti coppie di numeri:

- (22,14);
- (54,77);
- (117,99);
- (2342, 1764);
- (5577,7755);
- (2008,2080);
- (2178,1221).

Esercizio 2.
Se $\text{MCD}(a, b) = d$ e λ e μ formano una coppia di interi soddisfacente l'identità di Bézout $d = \lambda a + \mu b$, provare che $\text{MCD}(\lambda, \mu) = 1$.

Esercizio 3.
Dimostrare che se a e b sono due interi primi tra loro e tali che ab è un quadrato, allora a e b sono quadrati.

Esercizio 4.
Calcolare MCD e la coppia (λ, μ) dell'identità di Bézout tra le seguenti coppie di numeri:

- (72,120);
- (300,497);
- (5865,4416);
- (1215,510).

Esercizio 5.
Dimostrare che $\mathrm{MCD}(a, b) = a \iff \mathrm{mcm}(a, b) = b \iff a \mid b$.

Esercizio 6.
Utilizzando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive, stabilire che:

(a) ogni numero intero dispari è della forma $4k + 1$, $4k + 3$, con $k \in \mathbb{Z}$;

(b) il quadrato di ogni numero intero è della forma $3k$, $3k + 1$, con $k \in \mathbb{Z}$;

(c) il cubo di ogni numero intero è della forma $9k$ oppure $9k + 1$ oppure $9k + 8$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 7.
Utilizzando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive:

- Calcolare $\mathrm{MCD}(2424, 772)$ e un'identità di Bézout;
- Provare che $\mathrm{MCD}(a, b) \mid (a - b)$;
- Usando il punto precedente, trovare $\mathrm{MCD}(1962, 1965)$ e $\mathrm{MCD}(1961, 1965)$.