Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2008/2009
AL1 - Algebra 1
Esercitazione 9
Giovedì 4 Dicembre 2008
domande/osservazioni: dibiagio@mat.uniroma1.it

1. Usando il fatto che $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$, si ha $1 + z + \ldots + z^n = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$ dimostrare, quando ha senso, l'identità trigonometrica di Lagrange:
$$1 + \cos\theta + \cos(2\theta) + \ldots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

   $1 + \cos\theta + \cos(2\theta) + \ldots + \cos(n\theta) = \mathrm{Re}(1 + z + \ldots + z^n)$, con $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Allora $1+\cos\theta+\cos(2\theta)+\ldots+\cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left(\frac{z^{n+1}-1}{z-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{z^{n+1}-1}{z-1} + \frac{\overline{z}^{n+1}-1}{\overline{z}-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{z^n - z^{n+1} - \overline{z} + 1 + \overline{z}^n - \overline{z}^{n+1} - z + 1}{1-(z+\overline{z})+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\cos(n\theta) - 2\cos((n+1)\theta) - 2\cos\theta + 2}{2 - 2\cos\theta}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(n\theta) - \cos((n+1)\theta)}{2(1-\cos\theta)} =$ (formule di prostaferesi) $\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1-\cos\theta} = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1-\left(1-2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)} = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

2. Determinare $MCD(2322, 654)$ e scriverne due distinte identità di Bézout.

3. Sia $(M, \cdot, e)$ un monoide. Dimostrare che se $a \in M$ possiede un inverso destro e un inverso sinistro allora a è invertibile.

   Per ipotesi $\exists x, y \in M$ tali che $xa = ay = e$. Si ha: $x = xe = x(ay) = (xa)y = ey = y$, quindi $x = y$ e perciò a è invertibile per definizione.

4. Dimostrare che un monoide finito $(M, \cdot, e)$ in cui valgono le leggi di cancellazione è un gruppo.

5. Sia $(M, \cdot, e)$ un monoide. Dimostrare che se $a, b \in M$ sono invertibili allora ab è invertibile.

   Per ipotesi $\exists a^{-1}, b^{-1}$ tali che $aa^{-1} = a^{-1}a = bb^{-1} = b^{-1}b = e$. Quindi $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aea^{-1} = aa^{-1} = e$ e analogamente $(b^{-1}a^{-1})(ab) = e$, quindi ab è invertibile per definizione.