Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2008/2009
AL1 - Algebra 1
Esercitazione 3
Giovedì 16 Ottobre 2008
domande/osservazioni: dibiagio@mat.uniroma1.it

1. Dimostrare per induzione che:

   (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $1+3+5+\ldots+(2n+1)=(n+1)^2$;
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}_+$, $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$;
   (c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $1(1!)+2(2!)+3(3!)+\ldots+n(n!)=(n+1)!-1$;

   (a) La base dell'induzione ($n=0$) è chiaramente verificata. Procediamo con il passo induttivo. Supponiamo la formula vera per n (ipotesi induttiva) e dimostriamola per $n+1$: $1+3+\ldots+(2(n+1)+1)=1+3+\ldots+(2n+1)+(2n+3)=(n+1)^2+2n+3=n^2+4n+4=(n+2)^2$.
   (b) Per $n=1$ si ha $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1+1}$, quindi la base dell'induzione è verificata. Supponiamo la formula vera per n e dimostriamola per $n+1$: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$.
   Si osservi che la formula si poteva anche dimostrare usando ripetutamente l'uguaglianza $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. Allora $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.
   (c) La base dell'induzione ($n=0$) è verificata. Supponiamo la formula vera per n e dimostriamola per $n+1$: $1(1!)+2(2!)+\ldots+n(n!)+(n+1)((n+1)!)=(n+1)!-1+(n+1)((n+1)!)=((n+1)!)(1+(n+1))-1=(n+2)!-1$.

2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere: nel caso dimostrarle per induzione, altrimenti dare un controesempio.

   (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{2n}-1$ è un multiplo di 8;
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n+1$;
   (c) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $n! < n^n$;
   (d) $\forall n \in \mathbb{N}$, n^2+n+41 è un numero primo.

   (a) Per $n=0$, $3^{2n}-1=0$ che è divisibile per 8. Supponiamo l'asserto vero per n e dimostriamolo per $n+1$: $3^{2n+2}-1=3^{2n+2}-3^2+3^2-1=3^2(3^{2n}-1)+8$ che, data l'ipotesi induttiva, è chiaramente divisibile per 8.
   (b) Per $n=0$ è vero. Supponiamolo vero per n e dimostriamolo per $n+1$: $2^{n+1}=2\cdot 2^n \geq 2(n+1)=2n+2 \geq n+2$.
   (c) Per $n=2$ è vero: $2!=2<2^2=4$. Supponiamolo vero per n e verifichiamo la diseguaglianza per $n+1$: $(n+1)!=(n+1)(n!)<(n+1)n^n<(n+1)(n+1)^n=(n+1)^{n+1}$.

(d) Anche se l'asserto a prima vista potrebbe sembrare vero (in effetti per $n = 0, 1, \ldots, 39$ la formula produce numeri primi) chiaramente non può esserlo: per $n = 41$ $n^2 + n + 41$ è quantomeno divisibile per 41. In realtà, come si può facilmente verificare, anche per $n = 40$ il numero non è primo: $40^2 + 40 + 41 = 41^2$.

3. Siano A, B due insiemi finiti. Si dimostri che:

   (a) $A \cap B$ è un insieme finito;

   (b) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

4. Ricordando la definizione di coppia ordinata, vista a lezione, dati n insiemi $A_1 \ldots A_n$ non vuoti si definisca induttivamente il concetto di n-upla ordinata. Quindi si definisca $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ come l'insieme delle n-uple ordinate con coordinata i-esima appartenente a A_i. Se $A_1, \ldots, A_n$ sono insiemi finiti si dimostri che $|A_1 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_n|$.

   Ricordiamo che dati due insiemi A_1, A_2 allora $A_1 \times A_2 := \{(a_1, a_2) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$, dove $(a_1, a_2) := \{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\}$ è una coppia ordinata. Supponiamo allora $n \geq 2$ e supponiamo di aver definito il concetto di n-upla ordinata (per $A_1, \ldots, A_n$). Definiamo allora il concetto di $n+1$-upla ordinata (per $A_1, \ldots, A_{n+1}$): una $n+1$-upla è una coppia ordinata $((a_1, \ldots, a_n), a_{n+1})$ dove $(a_1, \ldots, a_n)$ è una n-upla ordinata (con $a_i \in A_i$) e $a_{n+1} \in A_{n+1}$.

   Per dimostrare che $|A_1 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_n|$ useremo l'induzione. Per $n = 1$ è chiaramente vero. Sia $n = 2$: per ipotesi A_1 è un insieme finito, quindi, senza perdita di generalità, possiamo supporre $A_1 = \{1 \ldots m\}$, $\exists m \in \mathbb{N}$. Notiamo inoltre che per ogni X insieme e $\{y\}$ singleton si ha una naturale biiezione $h : \{y\} \times X \to X$ definita da $(y, x) \mapsto x$. Perciò, se X è un insieme finito, si ha in particolare che $|X| = |\{y\} \times X|$.

   A_2 è un insieme finito per ipotesi, quindi $A_1 \times A_2 = \bigcup_{i=1}^{m} \{i\} \times A_2$ è una partizione in insiemi finiti, perciò, per quanto visto durante l'esercitazione, $A_1 \times A_2$ è finito e $|A_1 \times A_2| = \sum_{i=1}^{n} |\{i\} \times A_2| = \sum_{i=1}^{m} |A_2| = m|A_2| = |A_1||A_2|$.

   Sia ora $n \geq 2$. Supponiamo di aver dimostrato l'asserto per n e verifichiamolo per $n+1$: per definizione $A_1 \times \ldots \times A_{n+1} = (A_1 \times A_2 \ldots \times A_n) \times A_{n+1}$ che, visto così, è il prodotto cartesiano di due insiemi. Perciò, applicando il caso $n = 2$ e l'ipotesi induttiva, abbiamo che $(A_1 \times A_2 \ldots \times A_n) \times A_{n+1}$ è un insieme finito di cardinalità $|A_1| \cdot \ldots \cdot |A_{n+1}|$.

5. Sia X un insieme finito. Si dimostri che $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.

   Lo dimostreremo per induzione su $n = |X|$. Per $n = 0$, i.e. $X = \emptyset$, $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$ perciò $1 = |\mathcal{P}(X)| = 2^0$.

   Supponiamo allora la formula vera per n e dimostriamola per $n+1$. Senza perdita di generalità possiamo supporre $X = \{1, \ldots, n+1\}$. Sia $\mathcal{I} := \{A | A \in \mathcal{P}(X) \text{ e } n+1 \notin A\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ e sia $\mathcal{J} := \{A \cup \{n+1\} | A \in \mathcal{P}(X) \text{ e } n+1 \notin A\} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Chiaramente $\mathcal{I} = \mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})$. Quindi per l'ipotesi induttiva $|\mathcal{I}| = 2^n$. Inoltre $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ sono in biiezione, perciò

$|\mathcal{I}| = |\mathcal{J}|$. Ora: $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ è una partizione di $\mathcal{P}(X)$, quindi $|\mathcal{P}(X)| = |\mathcal{I}| + |\mathcal{J}| = 2 \cdot |\mathcal{I}| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

6. Tre coetanei Ada, Bruno e Chiara, sono incerti se andare al cinema. È noto che:

   ($\star$)condizione necessaria perché Bruno vada al cinema è che ci vada Ada;

   ($\star\star$)condizione sufficiente perché Bruno vada al cinema è che non ci vada Chiara.

   Dedurre dalle informazioni precedenti una delle affermazioni seguenti:

   Se Ada non va al cinema, allora:

   (a) Bruno e Chiara vanno al cinema;
   (b) non vanno al cinema né Bruno né Chiara;
   (c) Chiara va al cinema e Bruno no;
   (d) Bruno va al cinema e Chiara no;
   (e) nessuna delle affermazioni precedenti è valida.

   Negate quindi la seguente affermazione: "Se Chiara non va al cinema allora Bruno va al cinema"

   ($\star$) vuol dire "Bruno va al cinema" $\Rightarrow$ "Ada va al cinema". ($\star\star$) vuol dire "Chiara non va al cinema" $\Rightarrow$ " Bruno va al cinema". La prima affermazione è anche equivalente a "Ada non va al cinema" $\Rightarrow$ " Bruno non va al cinema", mentre la seconda è equivalente a " Bruno non va al cinema" $\Rightarrow$ "Chiara va al cinema". Perciò, tirando le somme: se Ada non va al cinema allora Bruno non va al cinema e allora Chiara va al cinema. Quindi l'affermazione corretta è la (d).
   "Se Chiara non va al cinema allora Bruno va al cinema" è logicamente equivalente a "Chiara va al cinema, oppure Bruno va al cinema". La negazione pertanto è: " Chiara non va al cinema e Bruno non va al cinema".