Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2008/2009
AL1 - Algebra 1
Esercitazione 1
Giovedì 2 Ottobre 2008
domande/osservazioni: dibiagio@mat.uniroma1.it

1. Dimostrare che le leggi distributive dell'unione rispetto all'intersezione e dell'intersezione rispetto all'unione valgono anche per famiglie arbitrarie di insiemi. Ovvero, dato X insieme, $A \in \mathcal{P}(X)$ (i.e. $A \subseteq X$), $\mathcal{F}$ famiglia arbitraria di sottoinsiemi di X (i.e. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$), dimostrare che:

   (a) $(\bigcap_{B\in\mathcal{F}} B) \cup A = \bigcap_{B\in\mathcal{F}}(B \cup A)$;

   (b) $(\bigcup_{B\in\mathcal{F}} B) \cap A = \bigcup_{B\in\mathcal{F}}(B \cap A)$.

   (a) Proveremo l'asserto per doppia inclusione, cioè faremo vedere che $(\bigcap_{B\in\mathcal{F}} B) \cup A \subseteq \bigcap_{B\in\mathcal{F}}(B \cup A)$ e che $(\bigcap_{B\in\mathcal{F}} B) \cup A \supseteq \bigcap_{B\in\mathcal{F}}(B \cup A)$:

   $\subseteq$) Se $x \in (\bigcap_{B\in\mathcal{F}} B) \cup A$ allora, per definizione di unione insiemistica, $x \in (\bigcap_{B\in\mathcal{F}} B)$ oppure $x \in A$ (ATTENZIONE: qui e nel seguito, se non detto altrimenti, gli "o" e gli "oppure" andranno sempre intesi nel modo inclusivo "o/e"; in simboli: $\vee$).
   Se $x \in (\bigcap_{B\in\mathcal{F}} B)$ allora $\forall B \in \mathcal{F}, x \in B$, quindi $\forall B \in \mathcal{F}, x \in B \cup A$, da cui $x \in \bigcap_{B\in\mathcal{F}}(B \cup A)$.
   Se $x \in A$ allora $\forall B \in \mathcal{F}, x \in B \cup A$, da cui nuovamente la tesi.

   $\supseteq$) Se $x \in \bigcap_{B\in\mathcal{F}}(B \cup A)$ allora, per definizione di intersezione insiemistica, $x \in B \cup A$ per ogni $B \in \mathcal{F}$.
   Distinguiamo i due casi $x \in A$ e $x \notin A$. Se $x \in A$ allora ovviamente $x \in (\bigcap_{B\in\mathcal{F}} B) \cup A$. Se $x \notin A$ allora, dato che $x \in B \cup A$ per ogni $B \in \mathcal{F}$, necessariamente $x \in B$ per ogni $B \in \mathcal{F}$, perciò $x \in \bigcap_{B\in\mathcal{F}} B$, da cui segue nuovamente la tesi.

   (b) Anche in questo caso proveremo l'asserto per doppia inclusione, ma cercando di essere più concisi. In particolare notate che le frecce $\Leftarrow$ dimostrano $\supseteq$, mentre le frecce $\Rightarrow$ dimostrano $\subseteq$:
   $x \in (\bigcup_{B\in\mathcal{F}} B) \cap A \Leftrightarrow x \in \bigcup_{B\in\mathcal{F}} B$ e $x \in A \Leftrightarrow x \in A$ e $\exists B_0 \in \mathcal{F}$ t.c. $x \in B_0 \Leftrightarrow \exists B_0 \in \mathcal{F}$ t.c. $x \in B_0 \cap A \Leftrightarrow x \in \bigcup_{B\in\mathcal{F}}(B \cap A)$.

2. Siano A, B insiemi. Dimostrare che:

   (a) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$

   (b) $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

   (c) $A \setminus A = \emptyset$; $A \setminus \emptyset = A$

   (d) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

   (e) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

   Tutte le uguaglianze si dimostrano per doppia inclusione, come abbiamo visto nel corso dell'esercitazione.

3. Sia X insieme, $A \subseteq X$, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dimostrare la seconda legge di De Morgan, ovvero:
$$A \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B = \bigcap_{B \in \mathcal{F}} (A \setminus B).$$

   Dimostreremo la seconda legge di De Morgan in due modi diversi.

   (a) Per doppia inclusione, come di consueto:
   $x \in A \setminus \bigcup_{B\in\mathcal{F}} B \Leftrightarrow x \in A$ e $x \notin \bigcup_{B\in\mathcal{F}} B \Leftrightarrow x \in A$ e $x \notin B$ per ogni $B \in \mathcal{F} \Leftrightarrow x \in A \setminus B$ per ogni $B \in \mathcal{F} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{B\in\mathcal{F}}(A \setminus B)$.

   (b) Usando la prima legge di De Morgan (DM1 - i.e. $A \setminus \bigcap_{B\in\mathcal{F}} B = \bigcup_{B\in\mathcal{F}}(A \setminus B)$) l'esercizio 1 (ES1) e i punti (d) e (e) dell'esercizio precedente:
   $A \setminus \bigcup_{B\in\mathcal{F}} B =^{(e)} A \setminus (A \cap \bigcup_{B\in\mathcal{F}} B) =^{\mathrm{ES1}} A \setminus (\bigcup_{B\in\mathcal{F}}(A \cap B)) =^{(d)} A \setminus (\bigcup_{B\in\mathcal{F}} A \setminus (A \setminus B)) =^{\mathrm{DM1}} A \setminus (A \setminus (\bigcap_{B\in\mathcal{F}}(A \setminus B)) =^{(d)} A \cap (\bigcap_{B\in\mathcal{F}}(A \setminus B)) = \bigcap_{B\in\mathcal{F}}(A \setminus B)$.

4. Descrivere esplicitamente $\mathcal{P}(\{1;2\})$ e $A := \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$. Dire poi se le seguenti affermazioni sono vere o false:

   (a) $\emptyset \subseteq A$;
   (b) $\emptyset \subseteq \{1;2\}$;
   (c) $\{1;2\} \cap \mathcal{P}(\{1;2\}) = \{1;2\}$;
   (d) $\emptyset \in A$;
   (e) $\emptyset \in \{1;2\}$;
   (f) $\{\emptyset\} \subseteq A$;
   (g) $\{\{\{\emptyset\}\}\} \subseteq A$.

   $\mathcal{P}(\{1;2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1;2\}\}$ e $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

   (a) Vera;
   (b) Vera;
   (c) Falsa;
   (d) Vera;
   (e) Falsa;
   (f) Vera;
   (g) Vera.

5. Per ogni $t \in \mathbb{R}_+$ si considerino gli insiemi $A_t := \{x \in \mathbb{Q}$ t.c. $|x - \sqrt{2}| < t\} \subseteq \mathbb{Q}$ e $B_t := \{x \in \mathbb{R}$ t.c. $|x - \sqrt{2}| < t\} \subseteq \mathbb{R}$. Determinare esplicitamente $\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} A_t$, $\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} B_t$, $\bigcap_{t\in\mathbb{R}_+} A_t$, $\bigcap_{t\in\mathbb{R}_+} B_t$.

   Notare che $A_t = B_t \cap \mathbb{Q}$.

   $\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} B_t = \mathbb{R}$. $\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} A_t = \bigcup_{t\in\mathbb{R}_+}(B_t \cap \mathbb{Q}) = (\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} B_t) \cap \mathbb{Q} = \mathbb{R} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$.

$\bigcap_{t\in\mathbb{R}_+} B_t = \{\sqrt{2}\}$, infatti chiaramente $\forall t \in \mathbb{R}^+, \sqrt{2} \in B_t$ e inoltre se $x \neq \sqrt{2}$ allora $|x-\sqrt{2}| \neq 0$, i.e. $|x-\sqrt{2}| \in \mathbb{R}_+$, e quindi $x \notin B_{|x-\sqrt{2}|}$ da cui $x \notin \bigcap_{t\in\mathbb{R}_+} B_t$.

$\bigcap_{t\in\mathbb{R}_+} A_t = (\bigcap_{t\in\mathbb{R}_+} B_t) \cap \mathbb{Q} = \emptyset$, dato che $\sqrt{2}$ è irrazionale.

6. Siano $X := \{1;2;3\}$ e $Y := \{1,2\}$. Descrivere esplicitamente $Y^X := \{f \text{ applicazione } | f : X \to Y\}$ e $X^Y := \{g \text{ applicazione } | g : Y \to X\}$ e dire quali tra le applicazioni individuate è iniettiva o suriettiva.

   Introduciamo le seguenti notazioni:

   siano $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 \in \mathbb{N}$, $1 \leq a_1, a_2, a_3 \leq 2$ e $1 \leq b_1, b_2 \leq 3$. Definiamo f_{a_1,a_2,a_3} come $f_{a_1,a_2,a_3} : X \to Y$ tale che per $i = 1,2,3$, $f_{a_1,a_2,a_3}(i) := a_i$ e definiamo g_{b_1,b_2} come $g_{b_1,b_2} : Y \to X$ tale che per $i = 1,2$ $g_{b_1,b_2}(i) := b_i$. Quindi, ad esempio, $f_{1,2,1}$ è la funzione da X a Y tale che $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 1$, e g_{33} è la funzione da Y a X tale che $1 \mapsto 3$ e $2 \mapsto 3$.

   $Y^X = \{f_{1,1,1}, f_{1,1,2}, f_{1,2,1}, f_{1,2,2}, f_{2,1,1}, f_{2,1,2}, f_{2,2,1}, f_{2,2,2}\} = \{f_{i,j,k} | 1 \leq i,j,k \leq 2\}$. In particolare $f_{1,1,2}, f_{1,2,1}, f_{1,2,2}, f_{2,1,1}, f_{2,1,2}, f_{2,2,1}$ sono suriettive. Ovviamente non vi possono essere funzioni iniettive da X a Y.

   $X^Y = \{g_{1,1}, g_{1,2}, g_{1,3}, g_{2,1}, g_{2,2}, g_{2,3}, g_{3,1}, g_{3,2}, g_{3,3}\} = \{g_{i,j} | 1 \leq i,j \leq 3\}$. In particolare le $g_{i,j}$ con $i \neq j$ sono iniettive. Ovviamente non vi possono essere funzioni suriettive con dominio Y e codominio X.