# CAM, a.a. 2003-2004 - Esercizi 3 [Soluzioni]

Giampiero Palatucci

22 marzo 2004

**1.** Dimostrare la validità delle seguenti disuguaglianze:

**a.** $\sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{1+y^2} + |x-y|, \quad \forall\, x \,\mathrm{e}\, y \in \mathbb{R}^+.$

Se $x \leq y$, allora la tesi è banalmente vera.

Verifichiamo la disuguaglianza per $x > y$.
Sia $f(t) := \sqrt{1+t^2}$.
Per il *Teorema di Lagrange*, esiste $\xi \in (y, x)$ tale che

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}$$

Poiché, $\dfrac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} \leq 1$, si ha la tesi.

**b.** $2\cos^2 x - 3\sin x + 2\sin^2 x < 3e^{-x} - 1, \quad \forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right).$

Poiché $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, si ha:

$$2\cos^2 x - 3\sin x + 2\sin^2 x < 3e^{-x} - 1 \Leftrightarrow 1 - \sin x < e^{-x}.$$

Sia $f(x) := e^x(1-\sin x)$, allora la tesi equivale a dimostrare che $f(x) < 1$ per ogni $x$ nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Osserviamo che $f(0) = 1$. Dimostriamo che la funzione $f$ è decrescente nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
Si ha:

$$f'(x) = e^x(1 - \sin x - \cos x)$$

Poiché

$$\sqrt{2} \equiv \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} \geq \sin x + \cos x > 1,$$

allora

$$1 - \sqrt{2} \leq (1 - \sin x - \cos x) < 0.$$

In particolare

$$e^x(1 - \sin x - \cos x) < 0, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

da cui la monotonia voluta per $f$.

**c.** $e^x \geq 1 + x, \quad \forall\, x \geq 0;$

**d.** $\ln(1+x) \geq x - \dfrac{x^2}{x}, \quad \forall\, x \geq 0.$

**2.** Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := e^x - \alpha x^3$ è convessa.

Osserviamo che $f$ è una funzione derivabile infinite volte con derivate continue. Quindi, il problema equivale a cercare per quali parametri reali $\alpha$ la funzione ha derivata seconda non negativa,
i.e. per quali $\alpha$

$$f''(x) = e^x - 6\alpha x \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se $\alpha < 0$ la funzione non è convessa.
Infatti,

$$\lim_{x \to -\infty} (e^x - 6\alpha x) = -\infty.$$

Se $\alpha = 0$ $\ f(x) \equiv e^x$ è convessa.

Studiamo il caso $\alpha > 0$.
Subito, se $x \leq 0$ si vede che $e^x \geq 6\alpha x$. Resta da analizzare la disuguaglianza $f''(x) \geq 0$ per le $x$ positive.
Poniamo

$$g(x) := \frac{e^x}{6x}$$

e vediamo per quali $\alpha$

$$g(x) \geq \alpha, \quad \forall x \in (0, \infty).$$

Poiché $g$ è continua in $(0, \infty)$ e $\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, allora ha un minimo in $(0, \infty)$.
Si ha

$$g'(x) = \frac{e^x}{6x^2}(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ne segue che $g(1) = \dfrac{e}{6}$ è un minimo per $g$.

In definitiva, $f$ è convessa su tutta la retta reale se e solo se $0 \leq \alpha \leq \dfrac{e}{6}$.

**3.** Un triangolo rettangolo di ipotenusa data $a$ viene fatto ruotare attorno ad uno dei due cateti per generare un cono circolare retto. Trovare il cono di volume massimo.

Ricordiamo che il volume di un cono circolare è dato da $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$, dove $r$ è il raggio della circonferenza di base ed $h$ è l'altezza.

Indichiamo con $x$ l'altezza del cono; segue (*Teorema di Pitagora*) $r = \sqrt{a^2 - x^2}$.
Scriviamo la funzione volume in funzione di $x$ e troviamone il massimo.
Si ha:

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi(a^2 x - x^3).$$

Da cui

$$V'(x) = \frac{1}{3}\pi(a^2 - 3x^2),$$

che è positiva per in $(0, \frac{a}{\sqrt{3}})$ e negativa in $(\frac{a}{\sqrt{3}}, \infty)$.

Segue che il volume massimo si ha per $r = x = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ e $h = \sqrt{\dfrac{2}{3}}a$.