GE4 - Geometria Differenziale
Dip. Matematica - Università Roma Tre

Tut. L. Corsi e G. Pestrin

Simulazione d'Esonero - 2 novembre 2007

Istruzioni. Scrivere nome, cognome, numero di matricola e firma su ogni foglio che si intende consegnare. Scrivere solamente sui fogli forniti. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici. **NON PARLARE** pena il ritiro del compito. Rispondere alle domande giustificando le risposte.

Punteggio totale 120 punti.

1. Consideriamo la curva piana $\gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t)$$

   (a) **(10 punti).** Mostrare che γ è una curva liscia e regolare. Disegnarne la traccia notando che $\gamma(t)$ si avvicina all'origine per $t \to +\infty$ spiraleggiandogli attorno.

   (b) **(10 punti).** Verificare che anche la velocità tende a zero per $t \to +\infty$.

   (c) **(10 punti).** Mostrare - calcolandola - che γ ha lunghezza finita nell'intervallo illimitato $t \in [\frac{1}{2}\ln 2, +\infty]$.

   (d) **(10 punti).** Notare che il vettore accelerazione $\ddot{\gamma}(t)$ è sempre perpendicolare al vettore posizione $\gamma(t)$.

   (e) **(10 punti).** Calcolare la curvatura di γ.

Girare, prego →

2. (a) **(10 punti).** Ricordiamo che data una funzione liscia su una superficie $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ e $p \in \Sigma$, la derivata $df_p : T_p\Sigma \to \mathbb{R}$ è definita come
$$df_p(\dot{\gamma}(t)) = \frac{d}{dt}(f(\gamma(t)))_{t=0}$$
per ogni curva liscia $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) :\to \Sigma$.
Dimostrare che se f è una funzione costante, allora $df_p = 0$ per ogni p.

   (b) **(20 punti).** Anche il viceversa è vero, dimostrarlo.

3. L'immagine dell'applicazione
$$\begin{array}{cccc} \mathbf{x} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \mapsto & (u \cos v, u \sin v, v) \end{array}$$
è una superficie regolare detta Elicoide.

   (a) **(10 punti).** Dimostrare che $\mathbf{x}$ è una carta locale.

   (b) **(10 punti).** Notare che la proiezione ortogonale $\pi : \Sigma \to \mathbb{R}^2$ sul piano orizzontale non è iniettiva e quindi π non è un diffeomorfismo.

   (c) **(20 punti).** Per quali punti $p \in \Sigma$ la proiezione ortogonale π è un diffeomorfismo locale? (Suggerimento: π è un diffeomorfismo locale in p, se e solo se la sua derivata $d\pi$ in p è un isomorfismo lineare, se e solo se $T_p\Sigma$ non contiene il vettore verticale $k = (0, 0, 1)$).