

Matematica - Roma Tre GE4 - Geometria Differenziale 1

ESERCIZI SU SUPERFICI E PIANO TANGENTE - ALVIN (13-10-09)

1. Considerare la seguente funzione di tre variabili

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \longmapsto z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2$$

(1.1) Trovare l'aperto massimale $U \subset \mathbb{R}^3$ in cui F è liscia, cioè di classe C^∞ e descrivere geometricamente il suo complementare: $\mathbb{R}^3 \setminus U$.

(1.2) Scrivere il campo gradiente ∇F e trovare i punti critici di F .

(1.3) Sia Σ il sottoinsieme dello spazio Euclideo

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 = 1\}$$

Dimostrare che Σ è una superficie liscia.

(1.4) Dimostrare che Σ è compatta, cioè un sottoinsieme chiuso e limitato di \mathbb{R}^3 .

(1.5) Dimostrare che l'applicazione

$$\mathbf{x} : (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \longmapsto ((\cos v + 3) \cos u, (\cos v + 3) \sin u, \sin v)$$

è una carta locale su Σ . Descrivere $Im(\mathbf{x}) \subset \Sigma$.

2. La superficie di Scherk è la superficie di tipo grafico $S \subset \mathbb{R}^3$ data da

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \ln \left(\frac{\cos x}{\cos y} \right), (x, y) \in A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \subset \mathbb{R}^2 \right\}$$

Trovare i punti in cui il piano tangente è orizzontale.

3. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il sottoinsieme di \mathbb{R}^3

$$S_a := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a + z^2\}$$

è una superficie regolare? Giustificare attentamente la risposta e disegnare S_a per almeno un valore del parametro a .

4. Quali delle seguenti applicazioni $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sono carta locale (parametrizzazione) di una superficie regolare? Giustificare attentamente.

(6.1) $X(u, v) = (u, uv, v)$

(6.2) $X(u, v) = (u^2, u^3, v)$

(6.3) $X(u, v) = (u, u^2, v + v^3)$

5. (Do Carmo, p.65 es.4, 7)

6. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione liscia e supponiamo che $1 \in \mathbb{R}$ sia un valore regolare cosicché $\Sigma := \{p \in \mathbb{R}^3 : f(p) = 1\}$ è una superficie regolare in \mathbb{R}^3 .

(9.1) Mostrare che per ogni curva $\alpha : I \rightarrow \Sigma$ si ha che $f \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione costante $f(\alpha(t)) = 1$ e quindi la sua derivata è nulla.

(9.2) Dedurre che per ogni punto $p \in \Sigma$ il piano tangente $T_p \Sigma$ coincide con il piano $Ker\{df_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}\}$, dove df_p è la derivata di f in $p \in \mathbb{R}^3$

(9.3) Usare il punto precedente per dimostrare che il piano tangente alla sfera S^2 nel polo Sud $S = (0, 0, -1)$ ha equazione $z = -1$

(9.4) Sia ora f la funzione liscia definita da $f(p) := \|p\|^2 = \langle p, p \rangle$, ovvero $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Mostrare che $1 \in \mathbb{R}$ è un valore regolare di f e che - in ogni punto $p \in S^2$ - il piano tangente $T_p S^2$ è il piano di \mathbb{R}^3 ortogonale al vettore posizione di $p \in \mathbb{R}^3$.