Matematica - Roma Tre

GE420 - Geometria Differenziale 1

20 ottobre 2010 - Superfici e Piano Tangente - Alvin

1. Considerare la seguente funzione di tre variabili

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & z^2+(\sqrt{x^2+y^2}-3)^2 \end{array}$$

(1.1) Trovare l'aperto massimale $U \subset \mathbb{R}^3$ in cui F è liscia, cioè di classe C^∞ e descrivere geometricamente il suo complementare: $\mathbb{R}^3 \setminus U$.

(1.2) Scrivere il campo gradiente ∇F e trovare i punti critici di F.

(1.3) Sia Σ il sottoinsieme dello spazio Euclideo

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2+(\sqrt{x^2+y^2}-3)^2 = 1\}$$

Dimostrare che Σ è una superficie liscia.

(1.4) Dimostrare che Σ è compatta, cioè un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^3$.

(1.5) Dimostrare che l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{x}: & (-\pi,\pi)\times(-\pi,\pi) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \mapsto & ((\cos v+3)\cos u, (\cos v+3)\sin u, \sin v) \end{array}$$

è una carta locale su Σ. Descrivere $Im(\mathbf{x}) \subset \Sigma$.

2. La superficie di Scherk è la superficie di tipo grafico $S \subset \mathbb{R}^3$ data da

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = \ln\left(\frac{\cos x}{\cos y}\right), \ (x,y) \in A = \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \subset \mathbb{R}^2\right\}$$

Trovare i punti in cui il piano tangente è orizzontale.

3. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$S_a := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 = a+z^2\}$$

è una superficie regolare? Giustificare attentamente la risposta e disegnare S_a per almeno un valore del parametro a.

4. Quali delle seguenti applicazioni $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sono carta locale (parametrizzazione) di una superficie regolare? Giustificare attentamente.

(6.1) $X(u,v) = (u, uv, v)$

(6.2) $X(u,v) = (u^2, u^3, v)$

(6.3) $X(u,v) = (u, u^2, v+v^3)$

5. (Do Carmo, p.65 es.4, 7)

6. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione liscia e supponiamo che $1 \in \mathbb{R}$ sia un valore regolare cosicché $\Sigma := \{p \in \mathbb{R}^3 \ : \ f(p) = 1\}$ è una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$.

(9.1) Mostrare che per ogni curva $\alpha : I \to \Sigma$ si ha che $f \circ \alpha : I \to \mathbb{R}$ è la funzione costante $f(\alpha(t)) = 1$ e quindi la sua derivata è nulla.

(9.2) Dedurre che per ogni punto $p \in \Sigma$ il piano tangente $T_p\Sigma$ coincide con il piano $Ker\{df_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\}$, dove df_p è la derivata di f in $p \in \mathbb{R}^3$

(9.3) Usare il punto precedente per dimostrare che il piano tangente alla sfera S^2 nel polo Sud $S = (0,0,-1)$ ha equazione $z = -1$

(9.4) Sia ora f la funzione liscia definita da $f(p) := \|p\|^2 =< p,p >$, ovvero $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Mostrare che $1 \in \mathbb{R}$ è un valore regolare di f e che - in ogni punto $p \in S^2$ - il piano tangente T_pS^2 è il piano di $\mathbb{R}^3$ ortogonale al vettore posizione di $p \in \mathbb{R}^3$.