Esercitazioni di GE03
Foglio 1

March 6, 2010

Esercizio 1. Trovare tutte le topologie di cui si può dotare un insieme con tre elementi.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}$ la retta reale. Dimostrare che la famiglia

$$\mathscr{S}^* = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$$

è una topologia. Questa topologia è detta topologia della semicontinuità superiore di $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Dimostrare che sui numeri reali, $\mathbb{R}$ le famiglie

$$\mathscr{T}_1 = \{(-a, a) \mid a \in \mathbb{R},\ a > 0\} \cup \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \quad \text{e}$$

$$\mathscr{T}_2 = \{[-n, n] \mid n \in \mathbb{N}, \} \cup \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$$

sono topologie. In seguito dire se sono più fini, meno fini o non confrontabili con la topologia euclidea.

Esercizio 4. Date su $\mathbb{R}$ le seguenti tre topologie: euclidea $\mathscr{E}$, della semicontinuità inferiore $\mathscr{S}$ e cofinita $\mathscr{C}$. Si dimostri che $\mathscr{E}$ è più fine di entrambe $\mathscr{S}$ e $\mathscr{C}$, mentre $\mathscr{C}$ e $\mathscr{S}$ non sono confrontabili.

Esercizio 5. Trovare uno spazio topologico X con una topologia $\mathscr{T}$, diversa dalla topologia grossolana (o banale) e dalla discreta, in cui ogni aperto sia anche chiuso.
Se in uno spazio topologico ogni aperto è sempre chiuso, è altresì vero che ogni chiuso è sempre aperto?

Esercizio 6 (*)**.** Dimostrare che in uno spazio topologico $(X, \mathscr{T})$ sono proprietà equivalenti

1. $\mathscr{T}$ è la topologia discreta

2. Ogni punto è aperto

[Suggerimento: Per provare l'implicazione 2. $\Rightarrow$ 1. usare il fatto che ogni insieme può essere visto come unione dei suoi punti]

Esercizio 7. Siano $X = \{a, b, c, d\}$ e $X' = \{1, 2, 3\}$ due insiemi. Si doti X della topologia

$$\mathscr{T} = \{\{d\}, \{b, c\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\} \cup \{\emptyset\}$$

e si doti X' della topologia

$$\mathscr{S} = \{\{3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Dire se la funzione $f : X \longrightarrow X'$ data dalla seguente tabella

x	$f(x)$
a	1
b	1
c	2
d	3

è continua.

Esercizio 8. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$. Si veda che, se entrambe le copie di $\mathbb{R}$ sono dotate della topologia euclidea essa è continua ma non aperta. Se invece si considerano entrambe le copie di $\mathbb{R}$ dotate della topologia della semicontinuità inferiore (descritta a lezione) cosa si può dire su f? E' continua? E' aperta?

Esercizio 9. Si consideri l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ e si denotino con $\mathscr{E}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{S}$ le topologie euclidea, cofinita e della semicontinuità inferiore, rispettivamente. Si considerino poi le seguenti applicazioni

$$f : (\mathbb{R}, \mathscr{E}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathscr{S}) \quad \text{data da } x \mapsto x$$

$$g : (\mathbb{R}, \mathscr{E}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathscr{C}) \quad \text{data da } x \mapsto x$$

$$h : (\mathbb{R}, \mathscr{S}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathscr{C}) \quad \text{data da } x \mapsto x.$$

Dire se f, g, h, f^{-1}, g^{-1} e h^{-1} sono continue, aperte, chiuse, omemorfismi.

Esercizio 10. Siano $(X_1, \mathscr{T}_1)$ e $(X_2, \mathscr{T}_2)$ due spazi topologici. Si consideri un'applicazione biettiva $f : X_1 \longrightarrow X_2$ mostrare che è un omeomorfismo se e solo se

$$U \in \mathscr{T}_1 \quad \Leftrightarrow \quad f(U) \in \mathscr{T}_2.$$

Esercizio 11. Sia (X, d) uno spazio metrico. Dimostrare che la famiglia delle palle aperte $\mathcal{B} = \{B_\rho(x) | x \in X, \ \rho \in \mathbb{R}^+\}$ è una base della topologia indotta dalla metrica d.

Esercizio 12. Dire se lo spazio topologico $(\mathbb{C}^n, \mathscr{T})$ è Hausdorff a seconda che $\mathscr{T}$ sia

1. la topologia euclidea;
2. la topologia cofinita
3. la topologia di Zariski (*)

4. la topologia discreta

Se $(X, \mathscr{T})$ è uno spazio topologico di Hausdorf e se $\mathscr{S}$ è una topologia su X più fine di $\mathscr{T}$, $(X, \mathscr{T})$ è ancora Hausdorff? E se $\mathscr{S}$ fosse meno fine?

Esercizio 13. Si supponga che X sia uno spazio topologico localmente euclideo di dimensione n. Se $f : X \longrightarrow Y$ è uno omeomorfismo locale suriettivo, allora anche Y è localmente euclideo di dimensione n.

Esercizio 14. Si dimostri che gli spazi localmente euclidei gli spazi metrici soddisfano al primo assioma di numerabilità.