Matematica - Roma Tre

GE310 - Istituzioni di Geometria Superiore - Prof. M.Pontecorvo

1 dicembre 2013

1. La superficie di Scherk è la superficie di tipo grafico $S \subset \mathbb{R}^3$ data da

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = \ln \left(\frac{\cos x}{\cos y} \right), \ (x, y) \in A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \subset \mathbb{R}^2 \right\}$$

   Trovare i punti in cui il piano tangente è orizzontale.

2. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$S_a := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = a + z^2\}$$

   è una superficie regolare? Giustificare attentamente la risposta e disegnare S_a per almeno un valore del parametro a.

3. Quali delle seguenti applicazioni $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sono carta locale (parametrizzazione) di una superficie regolare? Giustificare attentamente.

   (6.1) $X(u, v) = (u, uv, v)$

   (6.2) $X(u, v) = (u^2, u^3, v)$

   (6.3) $X(u, v) = (u, u^2, v + v^3)$

4. Do Carmo, p.65 es. 4 ; p.80 es. 7,8.

5. L'immagine dell'applicazione

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{x}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & (u \cos v, u \sin v, v) \end{array}$$

   è una superficie regolare detta Elicoide (la retta orizzontale $(u \cos v_0, u \sin v_0, v_0)$ si arrampica lungo l'elica $(u_0 \cos v, u_0 \sin v, v)$.

   (a) Dimostrare che $\mathbf{x}$ è una carta locale e determinare $T_p\Sigma$ al variare di p.

   (b) Trovare una funzione di 3 variabili F tale che l'Elicoide soddisfa $F(x, y, z) = 0$. Rispondere alla seguente domanda:

$$Im\mathbf{x} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \ t.c. \ F(x, y, z) = 0\}?$$

   (c) L'Elicoide è una superficie orientabile ?

6. (Algebra lineare). Dimostrare che sono ben definiti la traccia e il determinante di un operatore lineare $L : V \to V$ su uno spazio vettoriale di dimensione finita.