Matematica - Roma Tre

GE310 - Istituzioni di Geometria Superiore - Prof. M.Pontecorvo

21-25 ottobre 2013

1. Vero o falso? Il disco $\{z \in \mathbb{C}\ t.c.\ |z| < 1\}$ è omeomorfo all'anello $\{z \in \mathbb{C}\ t.c.\ 1 < |z| < 2\}$.

   Vero o falso ? Il disco bucato $\{z \in \mathbb{C}\ t.c.\ 0 < |z| < 1\}$ è omeomorfo all'anello $\{z \in \mathbb{C}\ t.c.\ 1 < |z| < 2\}$.

2. Dimostrare che una 2-varietà Σ è non-orientabile se e solo se contiene un nastro di Möbius.

3. Lo spazio quoziente dell'esagono regolare etichettato *abccab* è una superficie compatta? Se sì, classificarla.

4. *La derivata di un vettore di <u>modulo costante</u> è sempre perpendicolare al vettore stesso.* Sia $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva liscia. Mostrare che $|\alpha(t)|$ è una costante non nulla (i.e. la traccia di α è contenuta in una sfera centrata nell'origine) se e solo se $\alpha(t)$ è ortogonale alla sua derivata $\dot{\alpha}(t)$, $\forall t \in I$.

5. (a) Per quali valori del tempo t la Cicloide

   $$\gamma(t) = (3t - 3\sin t, 3 - 3\cos t)$$

   è una curva regolare?

   (b) Scomponendo l'equazione come somma di due moti, mettere in relazione "Cicloide" e "bicicletta".

   (c) Calcolare la lunghezza di un arco regolare di Cicloide.

6. Considerare la seguente applicazione $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definita a tratti:

   $$\alpha(t) = \begin{cases} (-e^{(-t^{-2})}, e^{(-t^{-2})}) & \text{se } t < 0, \\ (e^{(-t^{-2})}, e^{(-t^{-2})}) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

   (a) Descrivere la traccia di α con un disegno.

   (b) α è una curva liscia ?

   (c) α è una curva regolare ?

7. *Una curva infinita di lunghezza finita.* (Do Carmo, p.8 es.6) Sia $\alpha(t) = (ae^{bt}\cos t, ae^{bt}\sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, con $a > 0$, $b < 0$ costanti, una curva parametrizzata. Mostrare che:

   (a) Al tendere di $t \to \infty$, la curva $\alpha(t)$ si avvicina all'origine seguendo una spirale (per questo la traccia di α è detta *spirale logaritmica*).

   (b) Al tendere di $t \to \infty$ si ha $\dot{\alpha}(t) \to (0,0)$, e inoltre α ha lunghezza finita in $[t_0, \infty)$, i.e.

   $$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} |\dot{\alpha}(t)| dt < \infty$$

8. (*Facoltativo.*) (Do Carmo, p.10 es.8) *La lunghezza di una curva è il limite delle lunghezze delle poligonali inscritte.*