Matematica - Roma Tre
GE310 - Istituzioni di Geometria Superiore - Prof. M.Pontecorvo

14-21 ottobre 2013

1. Dimostare che gli unici sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che siano varietà connesse sono gli intervalli aperti i quali sono tutti omeomorfi a $\mathbb{R}$ stesso.

2. Fornire un esempio di applicazione continua e suriettiva che non sia un'applicazione quoziente. (Dimostrare !)

3. Enunciare il *Lemma dell'applicazione chiusa* ed usarlo in un esempio concreto.

4. (a) Il cilindro chiuso $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \parallel x^2 + y^2 = 1,\ \|z\| \leq 1\}$ è una varietà topologica ?

   (b) Il cilindro infinito $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \parallel x^2 + y^2 = 1\}$ è una varietà topologica ?

5. Definire $\mathbb{RP}^1$ e dimostare che è una 1-varietà topologica. Classificarla.

6. Consideriamo l'applicazione

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{x}: & [-\pi, \pi], [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \mapsto & (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v) \end{array}$$

   Dimostrare che è un'applicazione quoziente sull'immagine. Descivere l'immagine con un disegno. Descrivere la relazione d'equivalenza sul dominio con un poligono etichettato.

7. Dimostare che la sfera S^2 è l'elemento neutro dell'operazione somma connessa tra 2-varietà topologiche.

8. Dimostrare che la somma connessa di un Toro e un piano proiettivo $T^2 \# \mathbb{RP}^2$ è omeomorfa alla somma connessa di tre piani proiettivi $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$.

9. Fornire una triangolazione orientata della sfera S^2.

   Fornire una triangolazione non–orientata del piano proiettivo $\mathbb{RP}^2$.

   Dimostrare che le due superfici in questione non sono omeomorfe.