Simulazione del secondo esonero di CAM

(le soluzioni verranno fornite in rete)

Un consiglio: fatelo da soli e senza libri in tre ore, altrimenti che simulazione sarebbe??

Giustificare tutte le affermazioni

Esercizio 1.
Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \frac{2x + \log x^3 + 3}{1 + x^2 + x \log x^3} dx; \quad \int \sin(2x) \cdot \cos^2(2x) dx$$

Osserviamo che nel primo integrale il numeratore é la derivata del denominatore, quindi la primitiva é il logaritmo naturale del denominatore:

$$\int \frac{2x + \log x^3 + 3}{1 + x^2 + x \log x^3} dx = \log(1 + x^2 + x \log x^3) + C.$$

Per risolvere il secondo integrale osserviamo che $\sin(2x)$ é la derivata di $-\cos(2x)$, quindi l'integrando é della forma $f^2 \cdot f'$, la cui primitiva é $\frac{f^3}{3}$ a meno di segni. In conclusione la primitiva é $\frac{-\cos^3(2x)}{6}$.

Esercizio 2.
Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio converge

$$\int_0^1 \frac{(e^{\alpha x} - 1 - x) \cdot \sin x \cdot \log x}{x \log(1 + x^2)}$$

L'integrale é improprio in 0. Usiamo lo sviluppo di Taylor e otteniamo la frazione:

$$\frac{(x^2(\alpha - 1) + \frac{\alpha^2 x^3}{2} + o(x^3)) \log x}{x^3 + o(x^4)}$$

(Attenzione: $\log x$ vicino a zero non é sviluppabile!!! Diverge!!). Se $\alpha = 1$ la funzione integranda, approssimata, diventa

$$\frac{(\frac{x^3}{2} + o(x^3)) \log x}{x^3 + o(x^4)}.$$

E' noto che (limiti notevoli...) $o(x) \log x \to 0$, quindi otteniamo due pezzi:

$$\frac{\frac{x^3}{2} \log x}{x^3 + o(x^4)} + \frac{o(x^3) \log x}{x^3 + o(x^4)}.$$

Di cui: $\frac{\frac{x^3}{2}\log x}{x^3+o(x^4)}$ é asintotico a $\log x$ per $x \to 0$ (dividendo le due funzioni si ottiene un numero), e quest'ultima funzione é int. in senso improprio tra 0 e 1. La seconda frazione si riscrive come

$$\frac{o(x^2)o(x)\log x}{x^3+o(x^4)} \to 0$$

quindi questa parte di funzione non é illimitata in un intorno di zero e pertanto il suo integrale converge. Quindi, in conclusione, per $\alpha = 1$ l'integrale converge. Per $\alpha \neq 1$ invece diverge, infatti: il termine dominante al numeratore é $x^2(\alpha - 1)\log x$ e si deduce che

$$\frac{x^2(\alpha-1)\log x}{x^3+o(x^4)}$$

é asintotico a $\frac{\log x}{x}$ che non é integrabile in un intorno di zero in quanto é maggiore di $\frac{1}{x}$.

Esercizio 3.
Calcolare i seguenti limiti utilizzando la formula di Taylor:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x - x}{1-\sqrt{1-x^3}}; \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^3(e^x-\cos x)}$$

Primo limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{1}{6}x^3+o(x^4)-x}{\frac{1}{2}x^3+o(x^5)} = \frac{1}{3}.$$

Secondo limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-(x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^5))}{x^3(1+x+o(x)-1+o(x))} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^4+o(x^5)}{x^4+o(x^4)} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 4.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$, allora

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(t)dt \ = a.$$

Suggerimento: usare la definizione di limite di funzione, e sfruttare la monotonia dell'integrale.
$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ x_0 : |f(x) - a| < \varepsilon, \forall\ x \geq x_0$ ovvero

$$a-\varepsilon < f(x) < a-\varepsilon\ \forall\ x \geq x_0$$

il che implica

$$(a-\varepsilon)(x+1-x) < \int_x^{x+1} f(t)dt < (a-\varepsilon)(x+1-x)\ \forall\ x \geq x_0.$$

La tesi segue osservando che l'ultima relazione non é altro che la definizione di limite per $x \to +\infty$ applicata a $\int_x^{x+1} f(t)dt$.

Esercizio 5.

Enunciare uno dei due teoremi di de L'Hopital (con TUTTE le ipotesi!!!).
Enunciare il Teorema del confronto per integrali impropri.
Dare un esempio di :
(a) funzione integrabile in senso improprio in $[1, +\infty)$;
(b) funzione definita in $(2, 3)$, avente un asintoto verticale in $x = 2$, integrabile in senso improprio in $(2, 3)$;
(c) funzione definita in $(1, +\infty)$, avente un asintoto verticale in $x = 1$, integrabile in senso improprio in $(1, +\infty)$ (costruitela!!!).
Risposta (c) : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}\chi_{(1,2]}(x) + e^{-x}\chi_{(2,+\infty)}(x)$, dove $\chi_I(x)$ é la funzione caratteristica dell'intervallo I.