

ESERCIZI SULLE SUCCESSIONI NUMERICHE-SOLUZIONI

Esercizio 1

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 1} - \frac{n^2 + 1}{n + 1} \right)$.

Razionalizziamo:

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{n^2 + 1} - \frac{n^2 + 1}{n + 1} \right) \cdot \left(\sqrt{n^2 + 1} + \frac{n^2 + 1}{n + 1} \right) \cdot \left(\sqrt{n^2 + 1} + \frac{n^2 + 1}{n + 1} \right)^{-1} = \\ & = \left[(n^2 + 1) - \left(\frac{n^2 + 1}{n + 1} \right)^2 \right] \cdot \left(\frac{(n + 1)\sqrt{n^2 + 1} + n^2 + 1}{n + 1} \right)^{-1} = \\ & \left[\frac{(n^2 + 1)[(n + 1)^2 - n^2 - 1]}{(n + 1)^2} \right] \cdot \left(\frac{n + 1}{(n + 1)\sqrt{n^2 + 1} + n^2 + 1} \right) = \\ & = \frac{(n^2 + 1)[(n + 1)^2 - n^2 - 1]}{(n + 1)^2 \sqrt{n^2 + 1} + (n + 1)(n^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Dividiamo numeratore e denominatore per n^3 , e la frazione diventa:

$$\frac{2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)}$$

passando a limite si ottiene 1.

(ii)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{1 + a^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left[a^n \left(\frac{1}{a^n} + 1 \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln a^n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{1}{a^n} + 1 \right). \end{aligned}$$

Il primo termine é esattamente $\ln a$, mentre il secondo tende a zero, dato che $a \geq 1$, quindi $\ln \left(\frac{1}{a^n} + 1 \right) < \ln 2$.

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{(\ln n)^2 + \ln n^2}}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{(\ln n)^2 + \ln n^2}}}{n^2 + 1} \left(\frac{2}{e} \right)^{\sqrt{(\ln n)^2 + \ln n^2}}.$

Il termine $\left(\frac{2}{e}\right)^{\sqrt{(\ln n)^2 + \ln n^2}}$ tende a zero perché $2 < e$. D'altra parte, studiando separatamente la radice esponente di e :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(\ln n)^2 + \ln n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \sqrt{\frac{(\ln n)^2}{(\ln n)^2} + \frac{\ln n^2}{(\ln n)^2}} = \ln n.$$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{(\ln n)^2 + \ln n^2}}}{n^2 + 1} \simeq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\ln n}}{n^2 + 1} \rightarrow 0.$$

Quindi il limite iniziale é 0.

$$(iv) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^{\sqrt{(\ln n)^2 + \ln n^2}}}{n^2 + 1}$$

Questo limite é molto simile al precedente, c'è un 10 al posto di 2, ma in realtà il risultato é molto diverso perché é $+\infty$, quello che quindi conta é il rapporto tra la base dell'esponentiale, 10 oppure 2 e e che invece é la base del logaritmo naturale a cui tende la radice all'esponente. Si procede come nel limite precedente per cui il termine

$$\left(\frac{10}{e}\right)^{\sqrt{(\ln n)^2 + \ln n^2}} \rightarrow \infty$$

mentre l'altro termine tende a zero con lo stesso ordine di $\frac{1}{n}$. Ci troviamo di fronte ad una forma indeterminata. Poiché la radice $\sqrt{(\ln n)^2 + \ln n^2}$ ha lo stesso andamento di $\ln n$, come spiegato nell'esercizio precedente, si può riscrivere il limite come:

$$\begin{aligned} \left(\frac{10}{e}\right)^{\ln n} \cdot \frac{e^{\ln n}}{n^2 + 1} &= \left(\frac{10}{e}\right)^{\ln n} \cdot \frac{n}{n^2 + 1} = \\ \left(\frac{10}{e}\right)^{\lg_{\frac{10}{e}} n \cdot \ln \frac{10}{e}} \cdot \frac{n}{n^2 + 1} &= n^{\ln \frac{10}{e}} \frac{n}{n^2 + 1} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

l'ultimo passaggio tiene conto del fatto che $\ln \frac{10}{e} > 1$.

$$(v) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \tan \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\tan \frac{1}{n}} n \tan \frac{1}{n}} = e.$$

Si é tenuto conto dei limiti notevoli $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$ se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, e $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = 1$.

$$(vi) \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan(n^2 - 1) \frac{\cos 2n\pi}{n\pi} = \frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$(vii) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n + \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n \left(\frac{3}{2}\right)} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n \left(\frac{\ln n}{2n}\right)} \rightarrow e^{\frac{3}{2}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{2n}} \rightarrow e^{\frac{3}{2}}.$$

$$(viii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+n^2}{n^3} \cot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+n^2}{n^3} \frac{\cos \frac{1}{n}}{\sin \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+n^2}{n^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{n}}{n \sin \frac{1}{n}} = 1.$$

$$(ix) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n}\right)^{\cot \frac{1}{n}}$$

Utilizzando il risultato dell'esercizio precedente si ottiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2+n^2}{n^3} \right)^{\frac{n^3}{2+n^2}} \right]^{\frac{2+n^2}{n^3} \cot \frac{1}{n}} \rightarrow e.$$

(x) risultato = 1

(xi) risultato = 0

(xii) risultato = 1

(xiii) risultato = 0

(xiv) risultato = $+\infty$

(xv) risultato: per $x \in \mathbf{Z}$ la successione é identicamente uguale ad 1, mentre per tutti gli altri x reali tende a 0.

(xvi) riscriviamo il limite per sfruttare i limiti notevoli:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \sin \frac{1}{n} (\ln n)^2}{(n+1)^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} \frac{n}{n+1} \frac{(\ln n)^2}{n+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^2}{n+1} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

(xvii) utilizziamo il prodotto notevole $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ con $a = (n+2)^{\frac{1}{3}}$ e $b = n^{\frac{1}{3}}$. Quindi il limite diventa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{(n+2-n)}{(n+2)^{\frac{2}{3}} + (n(n+2))^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{(n+2)^{\frac{2}{3}} + (n(n+2))^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}}.$$

Abbiamo ottenuto un quoziente di polinomi di grado 1 al numeratore e $\frac{2}{3}$ al denominatore, quindi il limite é 0.

(xviii) riscriviamo il limite per sfruttare i limiti notevoli:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1} \right)^{\frac{n}{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1+1}{n-1} \right)^{\frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{\frac{1}{n-1} \cdot \frac{n(n-1)}{n+1}} = \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{n+1}} = +\infty. \end{aligned}$$

(xix) vogliamo ricondurci ad una forma del tipo $\left(1 + \frac{1}{a_n} \right)^{\frac{1}{a_n}}$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, e poi usare il limite notevole $\left(1 + \frac{1}{a_n} \right)^{\frac{1}{a_n}} \rightarrow e$. Risolviamo quindi l'equazione

$$\frac{1}{a_n} = 1 - \frac{n^2 + n}{n^2 - n + 2},$$

che é verificata se $a_n = \frac{n^2 - n + 2}{2n - 2} (\rightarrow \infty \text{ per } n \rightarrow \infty)$. Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n}{n^2 - n + 2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2n-2}{n^2 - n + 2} \right)^{\frac{n}{a_n}} \right]^{\frac{n}{a_n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a_n}} = e^2.$$

(xx) riscriviamo il limite come

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1 \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Usiamo in teorema dei carabinieri:

$$3 \leq 3 \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1 \right)^{\frac{1}{n}} \leq 3(1+1)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 3 \cdot 1$$

Pertanto tutta la successione tende a 3.

(xxi) riscriviamo il limite come

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{1}{e} \cdot e = 1.$$

(xxii) usiamo il Teorema dei Carabinieri per provare che il limite é 0.

$$\frac{n^2 + 2}{n} - \sqrt{n^2 + 4} = n + \frac{2}{n} - \sqrt{n^2 + 4} \leq n + \frac{2}{n} - \sqrt{n^2} = \frac{2}{n} \rightarrow 0.$$

D'altra parte si ha $n^2 + 4 < n^2 + 4 + \frac{2}{n^2} = \left(n + \frac{2}{n} \right)^2$. Quindi:

$$n + \frac{2}{n} - \sqrt{n^2 + 4} > n + \frac{2}{n} - \left(n + \frac{2}{n} \right) = 0.$$

Esercizio 2

Richiamiamo la definizione di limite:

$$L \text{ finito: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} : |a_n - L| < \varepsilon \forall n > \bar{n}.$$

$$L \text{ infinito: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \bar{n} : a_n > M \forall n > \bar{n}.$$

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 8n + 4}{n - 4} = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \bar{n} : \frac{n^2 - 8n + 4}{n - 4} > M \Leftrightarrow (\text{ per } n > 4)$$

$$n^2 - 8n + 4 > Mn - 4M,$$

risolvendo l'equazione di secondo grado, troviamo che la disuguaglianza é verificata per valori di n esterni all' intervallo delle radici, che chiameremo x_1 e x_2 , quindi se $n > x_2 = \bar{n}$ (se $x_2 > x_1$) sicuramente la disuguaglianza é verificata e cosí la definizione di limite.

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n}:$$

$$\left| \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right| < \varepsilon \forall n > \bar{n}.$$

Tenendo conto che $\ln(1 + \frac{1}{n}) > 0$, questa disuguaglianza é verificata se

$$1 + \frac{1}{n} < e^\varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{e^\varepsilon - 1} = \bar{n}.$$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{1+\frac{1}{n}} = e \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n}$:

$$\left| e^{1+\frac{1}{n}} - e \right| < \varepsilon.$$

Tenendo conto che $e^{1+\frac{1}{n}} > e$, si ha

$$e^{1+\frac{1}{n}} - e < \varepsilon \Leftrightarrow e^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{\varepsilon}{e} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{e}\right) \Leftrightarrow n > \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{e}\right)} = \bar{n}.$$

Esercizio 3

Consideriamo la successione:

$$x_n = a^n \frac{(-1)^n}{(n^2 + 1) \sin \frac{1}{n^2}}$$

la frazione tende a $\frac{(-1)^n}{1}$, per cui il limite é sicuramente indeterminato se $|a| \geq 1$. Infatti se $a = \pm 1 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (-1)^n$, se $|a| > 1 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm \infty$. Invece se $|a| < 1$ il limite é 0.

Esercizio 4

(a) usando il primo Teorema, con $a_n = n^{\frac{1}{n}}$, che tende a 1, si deduce facilmente che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}+\dots+n^{\frac{1}{n}}}{n} = 1$.

(b) usando il quarto Teorema, poiché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \rightarrow +\infty,$$

segue che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n}} = +\infty.$$

(c) osserviamo che $\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = \left(\frac{(n!)}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$, quindi sempre grazie al quarto Teorema, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \frac{n+1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1-1} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-1} \rightarrow \frac{1}{e} \text{ per } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

(d) usiamo ancora il quarto Teorema, ponendo $\frac{(n!)^{\frac{1}{2n}}}{n} = \left(\frac{\sqrt{n!}}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$, segue che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{(n+1)!} n^n}{(n+1)^{n+1} \sqrt{n!}} = \frac{\sqrt{(n+1)}}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

per quanto visto nell' esercizio precedente, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)}} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \rightarrow 0.$$

Esercizio 5

Se la successione a_n ammette limite, tutte le successioni estratte devono ammettere lo stesso limite, quindi un' implicazione é ovvia. D' altra parte, se a_{2k} e a_{2k-1} convergono allo stesso limite l , si avrá:

$$|a_{2k} - l| < \varepsilon \quad \forall n > n_1,$$

$$|a_{2k-1} - l| < \varepsilon \quad \forall n > n_2.$$

Quindi, se $n > \max(2n_1, 2n_2 - 1)$, risulta $|a_n - l| < \varepsilon$, quindi a_n tende a l .

Osservazione importante: in generale se due sottosuccessioni estratte da una successione data tendono al medesimo limite l , non é affatto detto che la successione di partenza converga ad l . Però, se le successioni estratte sono tali da esaurire tutti i possibili indici naturali, come accade per le successioni degli indici pari e dispari, allora si puó concludere che la successione di partenza tende allo stesso limite delle due sottosuccessioni.

Esercizio 6

Essendo monotone, le due successioni a_{2n} e a_{2n-1} sicuramente ammettono limite, finito o infinito. Per ipotesi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{2n} - a_{2n-1}) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

quindi grazie all' esercizio precedente, a_n ammette limite ed esso é uguale ad l .

Esercizio 7

Vogliamo trovare una successione a_n che ammette limite, ma le due sottosuccessioni degli indici pari e dispari, pur essendo monotone, quindi ammettendo limite, non verificano la proprieta $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{2n} - a_{2n-1}) = 0$. Basta scegliere $a_n = n$, essa ha limite $+\infty$, ma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{2n} - a_{2n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n - 2n + 1 \equiv 1.$$