SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI SUL PRINCIPIO DI INDUZIONE

Esercizio 1
(a) $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$
P_1 é vera, infatti per $n = 1$, $2^0 + 2^1 = 3 = 2^{1+1} - 1$. Supponiamo vera P_n e dimostriamo P_{n+1}:

$$(2^0 + 2^1 + ...2^n) + 2^{n+1} = (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1.$$

Abbiamo ottenuto P_{n+1}.
(b) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
Verifichiamo $P_1 : 1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Supponiamo vera P_n e dimostriamo P_{n+1}:

$$1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Abbiamo ottenuto P_{n+1}.
(c) se $a \geq -1$, $(1+a)^n \geq 1 + na$

Verifichiamo $P_1 : 1 + a = 1 + a$. Supponiamo vera P_n e dimostriamo P_{n+1}:

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a) = 1+a+na+na^2 = 1+a(n+1)+na^2 \geq 1+a(n+1).$$

L' ultima disuguaglianza deriva dal fatto che $na^2 \geq 0$. Abbiamo ottenuto P_{n+1}.

$(d)n! \geq 2^{n-1}$

Verifichiamo $P_1 : 1 \geq 1$. Supponiamo vera P_n e dimostriamo P_{n+1}:

$$(n+1)! = n!(n+1) \geq 2^{n-1}(n+1) \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n.$$

Abbiamo ottenuto P_{n+1}.
(e) se $a \neq 1, \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

Verifichiamo $P_1 : \sum_{k=0}^{1} a^k = a^0 + a^1 = 1 + a$. Supponiamo vera P_n e dimostriamo P_{n+1}:

$$\sum_{k=0}^{n+1} = a^0 + a^1 + ... + a^n + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}.$$

Abbiamo ottenuto P_{n+1}.

Esercizio 2

Riscriviamo la disuguaglianza come $x^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{x-1}{n}$, ovvero $x \leq \left(1 + \frac{x-1}{n}\right)^n$. Grazie alla disuguaglianza di Bernoulli si ha:

$$\left(1 + \frac{x-1}{n}\right)^n \geq 1 + n\frac{x-1}{n} = x.$$

Esercizio 3

Ovviamente un numero pari si scrive come multiplo intero di 2, quindi la nostra tesi é dimostrare che $n + n^2 = 2k,\ k \in \mathbb{N}$. Verifichiamo $P_1 : 1 + 1 = 2$ é un numero pari. Suppongo vera P_n, cioé che $n + n^2$ sia pari e dimostro P_{n+1}.

$$(n+1) + (n+1)^2 = n + 1 + n^2 + 2n + 1 = (n + n^2) + 2n + 2$$

poiché per ipotesi $n + n^2$ é pari, il numero $(n + n^2) + 2n + 2$ é anch' esso pari, e la tesi é dimostrata.

Esercizio 4

Usiamo l'induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$ si ha $x^2 + x + 1 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ perché il discriminanate dell'equazione di secondo grado é negativo, quindi non ci sono intersezioni con l'asse reale. Supponiamo l'asserto vero per n e proviamolo per $n + 1$. Scriviamo la tesi, ovvero

$$x^{2n+2} + x^{2n+1} + (x^{2n} .... + x^2 + x + 1) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

(attenzione: ad ogni passo si aggiungono 2 termini alla sommatoria!!). La parte tra parentesi tonde é non negativa per ipotesi induttiva, quindi proviamo a studiare il segno di quello che rimane, ovvero $x^{2n+2}+x^{2n+1} = x^{2n}(x^2+x)$. Poiché $x^{2n} \geq 0$, ci riduciamo ulteriormente a studiare $(x^2 + x) = x(x + 1)$. Con pochi conti si vede che $(x^2+x) \geq 0 \forall x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. Quindi avremmo risolto il problema ovunque tranne che nell'intervallo $[-1, 0]$. Facilmente si verifica (a mano!) che per $x = -1, 0$ l'asserto é vero. Per $x \in (-1, 0)$ riprendiamo la disuguaglianza iniziale:

$$x^{2n+2} + x^{2n+1} + (x^{2n} .... + x^2 + x + 1) = x^2(x^{2n} .... + x + 1) + x + 1$$

si ha: $x^2 \geq 0$, la somma $(x^{2n} .... + x + 1) \geq 0$ per ipotesi induttiva, $x + 1 \geq 0$ perché siamo nell'intervallo $(-1, 0)$.

Esercizio 5

Per induzione su n. Per $n = 1$ $S_{2^1} = 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$. Ora supponiamo vera la tesi per n, proviamola per $n + 1$.

$$S_{2^{n+1}} = S_{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}-1} + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

E' importante riuscire a capire quanti termini ci sono tra $S_{2^{n+1}}$ e S_{2^n}. La differenza é composta esattamente da 2^n termini. Li possiamo stimare nel seguente modo (usiamo ora l'ipotesi induttiva):

$$S_{2^{n+1}} \geq \frac{n}{2} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \geq$$

$$\geq \frac{n}{2} + 2^n \left(\frac{1}{2^{n+1}} \right) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$