Primo esonero di Am1a
2 novembre 2004
Soluzioni

Esercizio 1.
Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme

$$A = \left\{ x = \frac{\cos n\pi}{n^2} + \log \frac{1}{n},\ n \in \mathbf{N} \setminus \{\mathbf{0}\} \right\}$$

giustificare le risposte in modo rigoroso.
Riscriviamo l'insieme come

$$A = \left\{ x = \frac{(-1)^n}{n^2} - \log n,\ n \in \mathbf{N} \setminus \{\mathbf{0}\} \right\}$$

Osserviamo che A non e' limitato inferiormente, infatti $\forall M > 0 \exists x \in A : x < -|M|$. Infatti

$$\frac{(-1)^n}{n^2} - \log n < 1 - \log n < -|M| \Leftrightarrow n > e^{1+|M|}$$

quindi l'estremo inferiore e' $-\infty$. Riguardo l'estremo superiore, lo cerchiamo tra gli elementi dell'insieme che otteniamo per i primi n, visto che per n grande x diventa sempre piu' negativo. Un maggiorante, che appartiene anche all'insieme e' $\frac{1}{4} - \log 2$. Lo si ottiene per $n = 2$ ed e' maggiorante perche':

$$\frac{(-1)^n}{n^2} - \log n < \frac{1}{n^2} - \log n < \frac{1}{4} - \log n < \frac{1}{4} - \log 2.$$

Esercizio 2.

Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme

$$A = \left\{ x = \frac{3}{\log n},\ n \in \mathbf{N} \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\} \right\}$$

giustificare le risposte in modo rigoroso.
L'insieme e' composto da numeri POSITIVI, quindi 0 e' un minorante. Proviamo che e' l'inf dell'insieme:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : x < \varepsilon,$$

ovvero

$$\forall \varepsilon > 0,\ \frac{3}{\log n} < \varepsilon \ \Leftrightarrow n > e^{\frac{3}{\varepsilon}}.$$

Inoltre $\frac{3}{\log 2}$ appartiene all'insieme ed e' un maggiorante, infatti

$$\frac{3}{\log n} \leq \frac{3}{\log 2} \Leftrightarrow \log n > \log 2$$

il che e' vero perche' $n \geq 2$.

Esercizio 3.
Dato l'insieme

$$B = \left\{ x = \frac{n^2}{n^3 + 1},\ n \in \mathbf{N} \right\}$$

dimostrare che $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in B$ tale che $x \in I(0, \varepsilon)$. Dimostrare inoltre che esiste un intorno di $I(\frac{16}{65}, r)$ in cui non cadono punti di B diversi da $\frac{16}{65}$.
Si deve provare che $\forall \varepsilon > 0\ \frac{n^2}{n^3+1} < \varepsilon$ (la frazione e' SEMPRE positiva!). Osserviamo che $\frac{n^2}{n^3+1} < \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$, quindi

$$\frac{n^2}{n^3 + 1} < \frac{1}{n} < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Per rispondere alla seconda domanda osserviamo che i punti dell'insieme che si trovano a destra e a sinistra di

$\frac{16}{65}$ sono $\frac{9}{28}$ e $\frac{25}{126}$, quindi con un raggio

$$r < \min\left\{\left|\frac{16}{65} - \frac{9}{28}\right|, \left|\frac{16}{65} - \frac{25}{126}\right|\right\}$$

si ottiene l'intorno desiderato.

Esercizio 4.
Dimostrare per induzione che:

$$3^{n+1} \geq (n+1)^2 + 1 \qquad \forall n \in \mathbf{N}$$

Per $n = 0$ la proposizione e' vera: $3 \geq 2$. Diamo per buona P_n e verifichiamo P_{n+1}, ovvero

$$3^{n+2} \geq (n+2)^2 + 1.$$

Procediamo come al solito usando l'ipotesi induttiva:

$$3^{n+2} = 3^{n+1}3 \geq 3((n+1)^2 + 1) = 3n^2 + 6n + 6$$

ora proviamo che l'ultima espressione e' maggiore di $(n+2)^2 + 1$

$$3n^2 + 6n + 6 \geq (n+2)^2 + 1 = n^2 + 4n + 5 \text{vero } \forall n \in \mathbf{N}$$

Esercizio 5.
Enunciare gli assiomi di Peano.
Dare la definizione di minorante e maggiorante di un insieme di numeri reali.
Dare la definizione di relazione di equivalenza, fare un esempio.
Enunciare la proprietá di Archimede.