1. SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI SU ESTREMO SUPERIORE E INFERIORE DI INSIEMI

Esercizio 1.

(A): $\{x = n - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$
L' insieme é limitato inferiormente essendo composto da elementi non negativi. Quindi 0 é un minorante. Inoltre $0 \in A$, quindi $\min A = 0$. L' insieme non é peró limitato superiormente, come si puó facilmente verificare: $\forall M > 0$ arbitrariamente grande $\exists \overline{x} \in A \colon \overline{x} > M$.
Quindi $\sup A = +\infty$.

(B): $\{x = (-1)^n n + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$
L'insieme non é limitato né inferiormente né superiormente, poiché il termine $(-1)^n n$ diverge a $+\infty$ se n é pari e a $-\infty$ se n é dispari.

(C): $\{x = \frac{n-3}{n^2},\ n \in \mathbb{N}\} \cup (-1, 1)$
L' insieme é limitato inferiormente da -2, che é anche un minimo (lo si ottiene per $n = 1$). La frazione $\frac{n-3}{n^2}$ ha un andamento decrescente da $n = 4$ in poi e si avvicina sempre di piú a zero. A questo punto si deve considerare l' unione con l' intervallo $(-1, 1)$, per cui $\sup C = 1$.

(D): $\{x = n^2 + 3n - 1,\ n \in \mathbb{N}\}$
Il polinomio $n^2 + 3n - 1$ é crescente per $n \geq 1$, quindi il valore piú piccolo lo si ottiene per $n = 1$, quindi l' insieme é limitato inferiormente e $\min D = 3$. Non é limitato superiormente: basta verificare che $\forall M$ arbitrariamente grande esiste $\overline{n}$ tale che $\overline{n}^2 + 3\overline{n} - 1 > M$.

(E): $\{x \in \mathbb{R} \colon x^2 \leq 2\}$
Si ha $x^2 \leq 2 \iff -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$, per cui $\min E = -\sqrt{2},\ \max E = \sqrt{2}$.

(F): $\{x \in \mathbf{Q} \colon x^2 \leq 2\}$
Analogamente all' esercizio precedente si verifica che F é limitato, ma non ammette né minimo né massimo dato che $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$, quindi $\inf F = -\sqrt{2},\ \sup F = \sqrt{2}$.

(G): $\{x^3 \colon x \in \mathbf{Z}\}$

L' insieme non é limitato, $\inf G = -\infty,\ \sup G = +\infty$.

(H): $\{x = sin\frac{n\pi}{8},\ n \in \mathbb{N}\}$
L' insieme é sicuramente limitato, dato che la funzione $\sin x$ assume valori compresi tra -1 e $+1$. Cerchiamo due valori n_1 e n_2 per cui si abbia $\sin\frac{n_1\pi}{8} = -1$ e $\sin\frac{n_2\pi}{8} = +1$. Quindi risolviamo

$$\frac{n_1\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \Leftrightarrow\ n_1 = 4 + 16k$$

$$\frac{n_2\pi}{8} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \ \Leftrightarrow\ n_2 = 12 + 16k.$$

Deduciamo che $\min H = -1,\ \max H = +1$.

(I): $\{x = \frac{t+1}{t-2},\ t \in \mathbb{R}\ \ t > 2\}$
Si deduce immediatamente che $\frac{t+1}{t-2} > 1\ \forall t > 2$. Quindi l' insieme é limitato inferiormente. Inoltre $1 = \inf I$, infatti comunque scelto $\varepsilon > 0$, esisterá t_1 tale che $1 + \varepsilon > \frac{t_1+1}{t_1-2}$. Quest' ultima relazione é verificata per $t_1 > \frac{3-2\varepsilon}{\varepsilon}$. Non si ha invece limitatezza superiore: $\forall M \in \mathbb{R}$ arbitrariamente grande esiste t_2 tale che

$$\frac{t_2+1}{t_2-2} > M \Rightarrow t_2 + 1 > t_2M - 2M \ \Rightarrow\ t_2(M-1) < 1 + 2M \ \Rightarrow\ t_2 < \frac{1+2M}{M-1}.$$

Verifichiamo che $t_2 > 2$:
$\frac{1+2M}{M-1} > 2 \ \Leftrightarrow\ 1 + 2M > 2M - 2$, sempre verificato.

(L): $\{|x| :\ x^2 + x < 2,\ x \in \mathbb{R}\}$
Risolviamo l' equazione $x^2+x-2 < 0$, che é verificata per $-2 < x < 1$. Dovendo prendere in considerazione i moduli, valutiamo i valori assoluti degli $x \in (-2, 1)$. Otteniamo $0 < |x| < 2$, quindi l' insieme L é limitato sia inferiormente che superiormente, $\min L = 0,\ \sup L = 2$. Osserviamo che 2 non é un massimo.

Esercizio 2.

Osserviamo che $\frac{1}{n^\alpha} > 0\ \forall\alpha \in\ (0, +\infty),\ n \geq 1$. Quindi 0 é un minorante per l'insieme. Inoltre 0 é proprio l'inf dell'insieme, infatti:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\overline{n}\text{:}\ \frac{1}{n^\alpha} < 0 + \varepsilon$$

basta scegliere $\overline{n} > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}$.

Riguardo all'estremo superiore, osserviamo che $\frac{1}{n^\alpha} \leq 1\ \forall n \in \mathbb{N}$ e $\frac{1}{n^\alpha} = 1$ per $n = 1$. Quindi 1, essendo un maggiorante e facendo parte dell'insieme, é il massimo dell'insieme.

Non avendo fatto alcuna ipotesi su α nel precedente ragionamento, deduciamo che nulla cambia se $\alpha \in (0, 1)$, l'importante é che α sia positivo.

Esercizio 3.

Calcolare estremo superiore ed inferiore del seguente insieme:

$$A = \left\{ \frac{|x-3|}{|x+2|} \leq 1, \quad x \in \mathbb{R},\ x \neq -2 \right\}$$

Specificare se i valori trovati sono massimo e minimo.
Si deve scrivere l'insieme sotto forma di unione di intervalli, risolvendo la disequazione. Quindi:

$$\frac{|x-3|}{|x+2|} \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x-3}{x+2} \leq 1$$

risolviamo le due disequazioni separatamente e intersechiamo i risultati:

$$\frac{x-3}{x+2} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-5}{x+2} \leq 0 \ \Leftrightarrow x \geq -2;$$

$$\frac{x-3}{x+2} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+2} \geq 0 \ \Leftrightarrow x \leq -2 \text{ e } x \geq \frac{1}{2}.$$

Quindi la soluzione finale é $x \geq \frac{1}{2}$. L'insieme puó essere riformulato nel seguente modo: $A = \left\{ x \geq \frac{1}{2} \right\}$. Pertanto il minimo é $\frac{1}{2}$ e il sup é $+\infty$.

ESERCIZIO 4
Calcolare estremo superiore ed inferiore del seguente insieme:

$$C = \left\{ x = \frac{n^2-1}{3n^2} + \frac{2}{3}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

L'insieme é costituito da numeri ottenuti sommando a $\frac{2}{3}$ una quantitá strettamente positiva. Quindi sicuramente $\frac{2}{3}$ é un minorante. Inoltre per $n = 1$ otteniamo che $\frac{2}{3}$ fa parte dell'insieme. Pertanto il minimo dell'insieme é $\frac{2}{3}$. Osserviamo ora che $\frac{n^2-1}{3n^2} < \frac{1}{3}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infatti

$$\frac{n^2-1}{3n^2} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3n^2 - 3 < 3n^2, \text{ vero } \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Quindi 1 é un maggiorante per l'insieme. Cerchiamo di dimostrare che $1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ é il sup dell'insieme. Proviamo che $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in C$: $x > 1 - \varepsilon$, ovvero

$$x = \frac{n^2-1}{3n^2} + \frac{2}{3} > 1 - \varepsilon \Leftrightarrow \frac{n^2-1}{3n^2} > \frac{1}{3} - \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{3n^2} > \frac{1}{3} - \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{3\varepsilon}}.$$

Esercizio 5
Calcolare estremo superiore ed inferiore del seguente insieme:

$$D = \left\{ x = \frac{3n - |\sin n|}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

Osserviamo che possiamo scrivere $x \in D$ come $x = 3 - \frac{|\sin n|}{n}$, quindi, poiché $3 - \frac{|\sin n|}{n} < 3\ \forall n \in \mathbb{N}$, sicuramente l'insieme D é limitato. Proviamo che 3 é l'estremo superiore dell'insieme, ovvero che

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{n}\colon 3 - \frac{|\sin \overline{n}|}{\overline{n}} > 3 - \varepsilon.$$

Troviamo subito quello che cerchiamo perché, semplificando i 3 si ottiene

$$\frac{|\sin \overline{n}|}{\overline{n}} < \varepsilon \text{ quindi } \frac{|\sin \overline{n}|}{\overline{n}} < \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \overline{n} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Abbiamo quindi dimostrato che 3 é il sup dell'insieme. Passiamo all'inf. Avendo a disposizione solo tecniche elementari (non possiamo derivare etc..), dovremo accontentarci di fare un discorso un po' sommario. Dobbiamo riuscire a capire da quale n naturale la funzione $\frac{|\sin n|}{n}$ inzia a decrescere. Infatti, osserviamo che

$$2 < 3 - \frac{|\sin n|}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

quindi 2 é sicuramente un minorante, ma non é l'inf. L'estremo inferiore sará $3 - \frac{|\sin 1|}{1}$ oppure $3 - \frac{|\sin 2|}{2}$, insomma, uno dei primi termini della successione. Cercando di stimare $\sin 1$ e $\sin 2$, ci si accorge che $\sin 1 < \sin 2$, quindi, (se la frazione continua a decrescere, ma questo é molto probabile!!) l'estremo inferiore dovrebbe essere $3 - \sin 1$.