Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di AM1 - A.A. 2006/2007
Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Tutorato n.9 del 15/12/2006

Definizione 1. Si dice che un numero $M \in \mathbb{R}$ è un maggiorante definitivo per la successione $\{a_n\}$ se $\exists\, \nu \in \mathbb{R}$ t.c.

$$a_n \leqslant M \quad \forall\, n > \nu.$$

Analogamente, si dice che un numero $N \in \mathbb{R}$ è un minorante definitivo per la successione $\{a_n\}$ se $\exists\, \nu \in \mathbb{R}$ t.c.

$$a_n \geqslant N \quad \forall\, n > \nu.$$

Definizione 2. Si dice massimo limite di una successione $\{a_n\}$ l'estremo inferiore dell'insieme $\mathcal{M}$ dei maggioranti definitivi:

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \inf \mathcal{M}.$$

Analogamente, si dice minimo limite di una successione $\{a_n\}$ l'estremo superiore dell'insieme $\mathcal{N}$ dei minoranti definitivi:

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \sup \mathcal{N}.$$

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti:

1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n!}\right)^n$ 2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n+2}{n}}$

3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{7}{n}\right)^{2n}$ 4) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n^n}$

5) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{n!}$ 6) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n^2+n^4}\right)^n$

Esercizio 2. Calcolare massimo limite e minimo limite delle seguenti successioni:

1) $a_n = 1+(-1)^n$ 2) $a_n = n^{(-1)^n}$

3) $\displaystyle a_n = \frac{(-1)^n}{n}+\frac{1+(-1)^n}{2}$ 4) $\displaystyle a_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$

5) $\displaystyle a_n = \cos(n\pi)\frac{n+2}{n+1}$ 6) $a_n = \sqrt[n]{(-1)^n n}$

Esercizio 3. Studiare la convergenza puntuale delle seguenti successioni:

1) $\displaystyle a_n = \frac{1+xn^2}{x+n}$ 2) $\displaystyle a_n = \frac{1+xn^2}{x-n^2}$

3) $\displaystyle a_n = \sqrt[n]{\frac{n}{x+1}}$ 4) $\displaystyle a_n = \frac{2^{xn}}{n^2-2}$

5) $\displaystyle a_n = \frac{x^n-1}{2^{xn}}$ 6) $\displaystyle a_n = \frac{x^n-1}{2^n}$

Esercizio 4. Dimostrare il criterio del rapporto per la convergenza di una serie.

Esercizio 5. Dire se convergono le seguenti serie:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$ 4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-n^2}$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4}{4^n}$ 6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^\beta a^{-n}$

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{\binom{2n}{n}}$

Esercizio 6. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ convergono le seguenti serie:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{1 + |x|^{2n}}$ 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |x|^n \ln |x|^n$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + n|x|^n)$ 4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1 + |x|}{1 + n|x|}\right)^n$