Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di AM1 - A.A. 2006/2007
Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.4 del 27/10/2006

Esercizio 1. Dire se le seguenti funzioni sono delle distanze in $\mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$:

- Dobbiamo verificare le tre proprietà:

  (i) $d(x,y) \geqslant 0 \forall x, y \in \mathbb{R}$ $\;d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x^2 - y^2| = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = \pm y$, quindi non è una distanza in $\mathbb{R}$ poichè la prima proprietà non vale in $\mathbb{R}$, ma se siamo in $\mathbb{R}^+$ allora $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, stessa cosa in $\mathbb{R}^-$.

  (ii) Verifichiamo la proprietà (ii) per i casi $\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$. $d(x,y) = |x^2 - y^2| = |y^2 - x^2| = d(y,x)$ (in realtà ciò vale, più in generale, in $\mathbb{R}$).

  (iii) $d(x,y) = |x^2 - y^2| = |x^2 - z^2 + z^2 - y^2| \leqslant |x^2 - z^2| + |z^2 - y^2| = d(x,z) + d(z,y)$ (sappiamo che il modulo della somma è $\leqslant$ della somma dei moduli), quindi la terza proprietà è verificata in $\mathbb{R}$, in particolare in $\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$.

  Quindi è una distanza sia in $\mathbb{R}^+$ che in $\mathbb{R}^-$.

- La prima proprietà non è verificata in $\mathbb{R}$, ma solo in $\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$, quindi non può essere una distanza in $\mathbb{R}$. La seconda si verifica facilmente così come la terza. Quindi è una distanza in $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}^-$.

- Gode delle tre proprietà quindi è una distanza in $\mathbb{R}$ e su ogni suo sottoinsieme.

Esercizio 2. Basta vedere che sono verificate le tre proprietà (prestare attenzione alla prima proprietà).

Esercizio 3. Trovare gli estremi superiore ed inferiore dei seguenti insiemi. Dire se l'estremo superiore è un massimo e l'estremo inferiore un minimo.

- $\inf A = \min\{x \in A\} = \frac{1}{2}$, $\sup A = \frac{3}{2}$.

- $\inf B = 0$, $\sup B = \max\{x \in B\} = 1$.

- $\inf C = 1$, $\sup C = +\infty$.

- $\inf D = \min\{x \in D\} = \frac{1}{2}$, $\sup D = \frac{2}{3}$.

Esercizio 4. Dire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono aperti, chiusi, né aperti né chiusi:

- È chiaro che $(0,1) \cup [1,2) = (0,2)$, quindi $\forall x \in A$ sia $r \leqslant \min\{d(x,0), d(x,2)\}$ allora è $I = (x - r, x + r) \subset A$ poiché $x - r \geqslant 0$ e $x + r \leqslant 2$, quindi A è aperto.

- È $(0,1)\cap\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$, mostriamo che B^C è aperto: $B^C=\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ e $\forall x\in B^C$ sia $r\leqslant\min\left\{d\left(x,\frac{1}{3}\right),d\left(x,\frac{1}{2}\right)\right\}$ allora è $I=(x-r,x+r)\subset B^C$, quindi B^C è aperto e di conseguenza B è chiuso perché complementare di un aperto.

- Possiamo notare che $C=\mathbb{R}$ e dire quindi che C è aperto e chiuso poiché $\mathbb{R}$ è sia aperto che chiuso (dimostratelo facendo vedere che $\mathbb{R}$ si può scrivere come unione numerabile di aperti e come unione finita di chiusi), non possiamo sfruttare la proposizione 1 (foglio tutorato) poiché gli intervalli $(-j,j]$ non sono né aperti né chiusi (dimostratelo) e quindi la loro unione numerabile può dare luogo a insiemi aperti, chiusi o nessuno dei due.

- Dobbiamo capire quali sono gli $x\in\mathbb{R}|x\in D$: gli intervalli $D_j=(-j,j]$ sono tali che $D_j\subset D_{j+1}$, quindi i punti che sono contenuti in tutti gli intervalli D_j sono gli $x\in\mathbb{R}|x\in D_1=(-1,1]\Rightarrow D=(-1,1]$; ora proviamo che D non è né aperto né chiuso. Infatti ogni intorno di 1 è del tipo $I=(1-\epsilon,1+\epsilon)$ con $\epsilon>0$ ma $L=\{x\in\mathbb{R}|x\in(1,\epsilon)\}$ è tale che $L\subset I$, $L\not\subset D$, quindi non è aperto. Se fosse chiuso D^C sarebbe aperto: ma $D^C=(-\infty,-1]\cup(1,+\infty)$ e mentre $(1,+\infty)$ è aperto possiamo mostrare, analogamente a sopra, che $(-\infty,-1]$ non è aperto, quindi D^C non è aperto e, conseguentemente, D non è chiuso.

- $E=(0,2)$: infatti se $x\in(0,2)\ \exists j|\frac{1}{j}<x<2-\frac{1}{j}$, basta prendere $j=\max\{j_1,j_2\}$ dove $j_1=\min\left\{j|\frac{1}{j}<x\right\}$ e $j_2=\min\left\{j|x<2-\frac{1}{j}\right\}$, questo mi garantisce che $x\in E_j$ per un qualche j, quindi $x\in E$; possiamo ora mostrare che $(0,2)$ è aperto. A priori non possiamo dire niente perché quella che abbiamo è un'unione numerabile di chiusi e non c'è nessuna proposizione che possiamo usare.

- Mostrate che $F=(0,3]$ e fate vedere che $(0,3]$ non è né aperto né chiuso.

- Mostrate che $G=\emptyset$ facendo vedere che $\forall x\in\mathbb{R}\ \exists j|x\notin\left(\pi-\frac{1}{j},\pi\right)$, questo implica che x non è nell'intersezione, quindi G è sia aperto che chiuso (l'insieme vuoto è aperto e chiuso).

- Mostrate che $H=\{\pi\}$ e fate vedere che H è chiuso.

- Possiamo mostrare che $\forall j,k\ I_{j,k}=\left(j-\frac{1}{k},j+\frac{1}{k}\right)$ è aperto e quindi $I_j=\bigcap_{k=1}^{j}I_{j,k}$ è aperto perché intersezione finita di aperti e quindi $I=\bigcup_{j=1}^{+\infty}I_j$ è aperto in quanto unione numerabile di aperti.

- Mostriamo che $J=\mathbb{N}$: intuitivamente possiamo notare che fissato k abbiamo l'unione di intervalli centrati sui naturali e che all'aumentare di k il raggio di questi intervalli diminuisce, matematicamente sia $x\in\mathbb{R}$: se $x\leqslant-1\ \nexists k,j:x\in\left(j-\frac{1}{k},j+\frac{1}{k}\right)$, altrimenti $\exists!\ \bar{j}:x\in\left(\bar{j}-\frac{1}{2},\bar{j}+\frac{1}{2}\right]\ \exists\bar{k}>2:x\notin\left(\bar{j}-\frac{1}{\bar{k}},\bar{j}+\frac{1}{\bar{k}}\right)$ e fissato $\bar{k}$ $x\notin\left(j-\frac{1}{\bar{k}},j+\frac{1}{\bar{k}}\right)$ $\forall j$ e quindi x non è in una delle unioni e di conseguenza non è nell'intersezione. Quindi J è chiuso.