

**Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**  
**Tutorato di AM1 - A.A. 2006/2007**  
**Tutore: Dott. Nazareno Maroni**

Tutorato n.4 del 27/10/2006

1. Dire se le seguenti funzioni sono delle distanze in  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$ :

- $d(x, y) = |x^2 - y^2|$
- $d(x, y) = \left| \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \right|$
- $d(x, y) = |e^x - e^y|$

2. Dimostrare che, se  $f(x)$  è una funzione strettamente crescente in un insieme  $A \subset \mathbb{R}$ , allora  $|f(x) - f(y)|$  è una distanza in  $A$ .

3. Trovare gli estremi superiore ed inferiore dei seguenti insiemi. Dire se l'estremo superiore è un massimo e l'estremo inferiore un minimo.

- $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3n-2}{2n}, n \in \mathbb{N}^+ \right\}$
- $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2n+1}{n^2+2}, n \in \mathbb{N} \right\}$
- $C = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{t+1}{t-2}, t \in \mathbb{R}, t > 2 \right\}$
- $D = \left\{ x \in \left[ \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right] \mid x = \frac{m}{2n}, n, m \in \mathbb{N} \right\}$

4. Dire se i seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  sono aperti, chiusi, né aperti né chiusi:

$$A = (0, 1) \cup [1, 2)$$

$$B = (0, 1) \cap \left[ \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right]$$

$$C = \bigcup_{j=1}^{+\infty} (-j, j]$$

$$D = \bigcap_{j=1}^{+\infty} (-j, j]$$

$$E = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{j}, 2 - \frac{1}{j} \right]$$

$$F = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{j}, 2 + \frac{1}{j} \right]$$

$$G = \bigcap_{j=1}^{+\infty} \left( \pi - \frac{1}{j}, \pi \right)$$

$$H = \bigcap_{j=1}^{+\infty} \left( \pi - \frac{1}{j}, \pi + \frac{1}{j} \right)$$

$$I = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \bigcap_{k=1}^j \left( j - \frac{1}{k}, j + \frac{1}{k} \right)$$

$$J = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{j=0}^{+\infty} \left( j - \frac{1}{k}, j + \frac{1}{k} \right)$$

Per  $J$  sapete dire che sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  è?

5. Trovare i punti interni, i punti di frontiera e i punti di accumulazione dei seguenti insiemi, dire se sono chiusi.

- $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < -x\}$
- $B = (-\infty, 0]$
- $C = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$
- $D = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (2n - 1, 2n)$