

Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di AM1 - A.A. 2006/2007
Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Tutorato n.3 del 17/10/2006

1. Trovare, se esistono, estremo superiore e inferiore dei seguenti insiemi, specificando se sono, rispettivamente, massimo e minimo.

- $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2n+3}{3n-2}, n \in \mathbb{N} \right\}$
- $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2n+1}{n^2-2}, n \in \mathbb{N} \right\}$
- $C = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = (-1)^n \frac{n+1}{2n-1}, n \in \mathbb{N} \right\}$
- $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2^n}{n+3}, n \in \mathbb{N} \right\}$
- $E = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\cos(n\pi)}{3n+4}, n \in \mathbb{N} \right\}$
- $F = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{n \log n}{n^2+1}, n \in \mathbb{N}^+ \right\}$
- $G = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\cos(n\pi)(n^2+2)}{2n^2-1}, n \in \mathbb{N} \right\}$
- $H = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{n^2}{n+3}, n \in \mathbb{N} \right\}$
- $I = \mathbb{N} \cup \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = -\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^+ \right\}$

2. Dimostrare che se $X, Y \subset \mathbb{R}$, $X, Y \neq \emptyset$ e $X+Y = \{x+y \mid x \in X, y \in Y\}$, allora:

- (i) $\sup(X+Y) = \sup X + \sup Y$,
- (ii) $\inf(X+Y) = \inf X + \inf Y$.

3. Dimostrare che se $X, Y \subset \mathbb{R}$, $X, Y \neq \emptyset$, $X \subset Y$, allora:

$$\inf Y \leq \inf X \leq \sup X \leq \sup Y.$$

4. Dimostrare che se $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $X_t = \{tx \mid x \in X, t \in \mathbb{R}^+\}$, allora:

- (i) $\sup X_t = t \sup X$,
- (ii) $\inf X_t = t \inf X$.