V tutorato di Analisi Matematica 1A

Gabriele Nocco Stefano Urbinati

24 ottobre 2005

Esercizio 1. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false e motivare la risposta:

Sia E un insieme non vuoto di numeri reali.

a) L'estremo superiore di E è sempre punto di accumulazione per E.

b) Se c è un punto di accumulazione per E, dato un arbitrario $\epsilon > 0$, l'intervallo $(c - \epsilon, c + \epsilon)$ deve contenere infiniti punti di E.

c) L'intervallo $[a, +\infty)$ risulta chiuso in $\mathbb{R}$, mentre l'insieme $[a, b)$ non è nè aperto nè chiuso.

Esercizio 2. Si consideri in $\mathbb{R}$ l'insieme $C = A \cup B$, dove

$A = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x \leq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x = -2 + \log(1 + \frac{1}{n})^{-1}, n \in \mathbb{N}_0\}$. Determinare:

a) l'insieme dei punti di accumulazione di C.

b) l'insieme dei punti isolati di C.

c) l'insieme dei punti interni di C.

Esercizio 3. Dati i seguenti insiemi trovere tutti i punti di accumulazione, estremo inferiore, estremo superiore e qualora esistano massimo e minimo motivando ogni risposta con la caratterizzazione.

a) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n \frac{n}{n+4}, n \in \mathbb{N}\}$

b) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n} + \log 1/n, n \in \mathbb{N}_0\}$

c) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\cos n\pi}{n^2+16}, n \in \mathbb{N}\}$

d) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = n + log\frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}_0\}$

Esercizio 4. Trovare, qualora esistano, estremo superiore e inferiore dei seguenti insiemi e dire se sono rispettivamente un massimo e un minimo per lo stesso insieme. Motivare le risposte verificandole attraverso la caratterizzazione.

a) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{t+1}{t-2}, t \in \mathbb{R}\}$

b) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \sin \frac{n\pi}{8}, n \in \mathbb{Z}\}$

c) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n^2}{n+3}, n \in \mathbb{N}\}$

d) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = -n^2 + 22n + 10, n \in \mathbb{N}\}$

d) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n-\sqrt{n}}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$

Esercizio 5. Dimostrare che:
se A è limitato superiormente, tale che $l = supA \notin A$ allora
$\forall \epsilon > 0 \; \exists \; I(l, \epsilon) : I(l, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Esercizio 6. Si consideri in $\mathbb{R}$ l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 2\}$, dimostrare che:

a) $\forall \epsilon > 0, \; \exists \; I(x, \epsilon) : I(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$.

b) $\forall \epsilon > 0, \; \exists \; I(0, \epsilon)$ e $\exists I(2, \epsilon)$ che contengono punti di A e di $C(A)$.

e trovare l'insieme dei punti interni A.

Esercizio 7. Si consideri in $\mathbb{R}$ l'insieme $B = \{x \in \mathbb{R} : x = 2 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_0\}$, dimostrare che:

a) $\forall \epsilon > 0, \; \exists \; \overline{x} \in B : \overline{x} \in I(2, \epsilon)$.

b) $\exists r > 0 \; : \; I(2 + \frac{1}{4}, r) \cap A \neq \emptyset$.

c) $\forall r > 0, \exists I(2, r) : I(2, r) \cap B \neq \emptyset \wedge I(2, r) \cap C(B) \neq \emptyset$.

e trovare l'insieme dei punti interni di B.