Soluzione del II tutorato di Analisi Matematica 1A

Gabriele Nocco Stefano Urbinati

3 ottobre 2005

Esercizio 1. Si consideri l'equazione $\sqrt{5-x} = 1+\sqrt{x}$. Elevando al quadrato entrambi i membri si ottiene $5-x = 1+2\sqrt{x}+x$ cioé $2-x = \sqrt{x}$. Elevando nuovamente al quadrato si ottiene l'equazione $x^2-5x+4 = 0$ che ha soluzioni $x = 4$ e $x = 1$. Sostituendo quindi $x = 4$ nell'equazione di partenza si ha $1 = 3$. Cos'è che non va?

Soluzione 1. Si ricordi che $x^2 = (-x)^2$ quindi elevando due volte al quadrato una certa equazione si immettono altre soluzioni che possono non avere nulla a che fare con quelle di partenza. In particolare, in questo caso, si ha che 4 esce dal campo d'esistenza.

Esercizio 2. Dimostrare che, se a, b, $c \in \mathbb{R}^+$, risulta:

a) $(a + b)(b + c)(a + c) \geq 8abc$

b) $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \geq abc(a + b + c)$

Soluzione 2. Per risolvere le disequazioni si consiglia di usare $a^2+b^2 \geq 2ab$.

Esercizio 3. Dire per quali $x \in R$ sono soddisfatte le seguenti disuguaglianze:

a) $\frac{|x-3|}{|x+2|} \leq 1$

b) $\frac{||x|-3|}{|x-3|} < 2$

c) $|x^2 - 2| < x + |x + 1|$

d) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) > 0$

e) $\frac{\sin x-\cos x}{4 \sin x+9} \geq 0$

f) $\log_2(2 \sin^2 x - \sin x + 3) > 2$

Soluzione 3. a) Notiamo che il numeratore si annulla per $x = 3$, mentre il denominatore si annulla per $x = -2$. Quindi andiamo a studiare la disequazione nei tre casi, $x < -2, -2 < x \leq 3$, $x > 3$.

Per $x < -2$ si ha semplicemente che $-x+3 \leq -x-2$ quindi si avrebbe $+3 \leq -2$ cioé un assurdo. Da qui possiamo assumere che per nessuna $x < -2$ si hanno valori utili.
Per $-2 < x \leq 3$ si ha che $-x + 3 \leq x - 2$, da cui si ha: $x \leq 1/2$. Ricordiamo che tale intervallo deve essere intersecato con l'intervallo in cui ci troviamo, quindi avremo soluzioni $\forall x \in (-2, 1/2\,]$.
Per $x > 3$ si ha di conseguenza $x - 3 \leq x + 2$, quindi $-3 \leq 2$ che essendo vero indipendentemente da x é vero $\forall x \geq 3$.

b) La disuguaglianza vale $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$

c) $x \in [-2, -\sqrt{3}]$

d) $-\sqrt{2} < x < -1$ e $1 < x < \sqrt{2}$

e) $2k\pi/4 \leq x \leq 10k\pi/4$

f) $7k\pi/3 \leq x \leq 11k\pi/3$

Esercizio 4. Si provi per induzione che, per ogni intero positivo n, risulta:

a) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

c) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

d) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n+1)^3 = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)$

Soluzione 4. a) Si puó verificare l'uguaglianza per un fissato n, ad esempio per $n = 1$ si ha facilmente che $1/2 = 1/2$. Ora supponiamo che l'uguaglianza sia vera per n e andiamola a verificare per $(n + 1$. Quindi sappiamo che $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, andiamo a dimostrare che $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$. Ma per fare ció possiamo sfruttare la base induttiva quindi basta verificare che $\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$.

b) Si deve sempre verificare la bese induttiva, ad esempio $n = 1$ e si avrá $1 = 1$. Poi come in a) si suggerisce di separare le sommatorie.

c) Come in b).

d) Come in c).

Esercizio 5. ***Momento relax***: trova l'errore in queste dimostrazioni per induzione giustificando la risposta.

- Zero uomini non hanno orecchie, prendendo questo come base induttiva possiamo supporre che, ogni gruppo di $n-1$ persone non abbiano orecchie, quindi adesso procediamo col passo induttivo; aggiungiamo un uomo al gruppo di $n-1$ uomini che abbiamo come base induttiva, e togliamone uno dall'insieme originale. Così modificato questo sarà un insieme di $n-1$ che per ipotesi induttiva non ha orecchie!!!

- C'è una scatola con n pastelli di diversi colori. Prendo un pastello, questo è rosso (base induttiva); per ipotesi ogni gruppo di $n-1$ pastelli è formato da pastelli rossi; allora tutti i pastelli della scatola sono rossi! Infatti aggiungendo un pastello al gruppo degli $n-1$ dell'ipotesi induttiva e togliendone uno dei vecchi, ottengo un gruppo di $n-1$ pastelli che per ipotesi sono tutti rossi e l'asserto è verificato!!!

Soluzione 5. Ci sono vari modi di trovare degli errori in queste dimostrazioni, che comunque saranno sempre trovati nel primo passo induttivo. Ad esempio si puó dire che quando si va a togliere un uomo dal gruppo di $n-1$ uomini siamo impossibilitati a togliere un uomo da un insieme che per definizione é vuoto. Da qui si capisce che non si puó procedere per induzione. Altresí si puó dire che se al gruppo di $n-1$ uomini, a cui poi verrá aggiunto l' n-simo uomo, viene tolto un uomo, quindi $(n-1)-1$, partendo da $n=1$ si ha che $n=-1$ non appartiene a $\mathbb{N}$ e quindi si andrebbe a calcolare l'induzione per valori non naturali, il che é insensato.