Soluzioni VI tutorato di AM1a

Gabriele Nocco Stefano Urbinati

18 novembre 2004

Esercizio 1. Utilizzando la definizione di limite, verificare che:

a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} = 1$

b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$

c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$

Suggerimento: maggiorate $|\cos n|$ con 1!!!

d) $\lim_{n\to+\infty} \sin \frac{1}{n} = 0$

Dovete utilizzare: $0 \leq \sin x \leq x$

e) $\lim_{n\to+\infty} \log(1 + \frac{1}{n}) = 0$

Esercizio 2. Dimostrare che, se a_n converge ad a e b_n converge a b, allora $a_n - b_n$ converge ad $a - b$.

Sol: lavorate con il massimo tra gli n che verificano la caratterizzazione per lo stesso ϵ, poi applicate la definizione, minorando con la disuguaglianza triangolare per i moduli.

Esercizio 3. Calcolare i limiti ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, c \neq 0$):

a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{an+b}{cn+d}$ Sol: $\frac{a}{c}$

b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{an^2+b}{cn+d}$

sol: 0 se $a = 0$, se a $\neq 0$ varrà $+\infty \vee -\infty$ a seconda del segno del rapporto a/c.

c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{an+b}{cn^2+d}$ Sol: 0

d) $\lim_{n\to+\infty} \frac{an^2+b}{cn^2+d}$ Sol: $\frac{a}{c}$

Esercizio 4. Provare che se $a_n \to a \in \mathbb{R}$, con $a > 0$ e se $b_n \to +\infty$, allora la successione prodotto $a_n \cdot b_n$ diverge a $+\infty$.

Sol: vi basta maggiorare $a - \epsilon$ con $a/2$ e poi applicare la definizione.

Esercizio 5. Calcolare i seguenti limiti:

a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^3+9n^2}-\sqrt{n^4+1}}{n^2+2}$ Sol: -1

b) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^4+1}$ Sol: 1

c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n!}$

Sol: 0 (vi basta esplicitare i primi due termini del fattoriale)

d) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}$ Sol: 3

e) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n}$

Sol: 0 (per minorazioni successive arrivate ad $1/n$)

Esercizio 6. Data la successione $\{a_n\}$ definita:

$$\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}$$

ricavare a_n in funzione di n. Stabilire se la successione è crescente o decrescente e se essa è limitata superiormente o inferiormente. Calcolare, se esiste, $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

Sol: la successione diventa: $a_n = \frac{2^{n+1}+1}{2^n}$