ESERCIZI SULLE SUCCESSIONI NUMERICHE-SOLUZIONI

Esercizio 1
(i) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\frac{n^2+1}{n+1}\right)$.
Razionalizziamo:

$$\left(\sqrt{n^2+1}-\frac{n^2+1}{n+1}\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+1}+\frac{n^2+1}{n+1}\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+1}+\frac{n^2+1}{n+1}\right)^{-1}=$$

$$=\left[(n^2+1)-\left(\frac{n^2+1}{n+1}\right)^2\right]\cdot\left(\frac{(n+1)\sqrt{n^2+1}+n^2+1}{n+1}\right)^{-1}=$$

$$\left[\frac{(n^2+1)[(n+1)^2-n^2-1]}{(n+1)^2}\right]\cdot\left(\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n^2+1}+n^2+1}\right)=$$

$$=\frac{(n^2+1)[(n+1)^2-n^2-1]}{(n+1)^2\sqrt{n^2+1}+(n+1)(n^2+1)}.$$

Dividiamo numeratore e denominatore per n^3, e la frazione diventa:

$$\frac{2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$$

passando a limite si ottiene 1.

(ii)

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{1+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left[a^n\left(\frac{1}{a^n}+1\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln a^n+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{a^n}+1\right).$$

Il primo termine é esattamente $\ln a$, mentre il secondo tende a zero, dato che $a\geq 1$, quindi $\ln\left(\frac{1}{a^n}+1\right)<ln2$.

(iii) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\sqrt{(\ln n)^2+\ln n^2}}}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\sqrt{(\ln n)^2+\ln n^2}}}{n^2+1}\left(\frac{2}{e}\right)^{\sqrt{(\ln n)^2+\ln n^2}}$.

Il termine $\left(\frac{2}{e}\right)^{\sqrt{(\ln n)^2+\ln n^2}}$ tende a zero perché $2 < e$. D'altra parte, studiando separatamente la radice esponente di e :
$\lim_{n\to\infty} \sqrt{(\ln n)^2 + \ln n^2} = \lim_{n\to\infty} \ln n \sqrt{\frac{(\ln n)^2}{(\ln n)^2} + \frac{\ln n^2}{(\ln n)^2}} = \ln n.$
Quindi
$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\sqrt{(\ln n)^2+\ln n^2}}}{n^2+1} \simeq \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\ln n}}{n^2+1} \to 0.$
Quindi il limite iniziale é 0.
(iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{10^{\sqrt{(\ln n)^2+\ln n^2}}}{n^2+1}$
Questo limite e' molto simile al precedente, c'e' un 10 al posto di 2, ma in realta' il risultato e' molto diverso perche' e' $+\infty$, quello che quindi conta e' il rapporto tra la base dell'esponenziale, 10 oppure 2 e e che invece e' la base del logaritmo naturale a cui tende la radice all'esponente. Si procede come nel limite precedente per cui il termine

$$\left(\frac{10}{e}\right)^{\sqrt{(\ln n)^2+\ln n^2}} \to \infty$$

mentre l'altro termine tende a zero con lo stesso ordine di $\frac{1}{n}$. Ci troviamo di fronte ad una forma indeterminata. Poiche' la radice $\sqrt{(\ln n)^2 + \ln n^2}$ ha lo stesso andamento di $\ln n$, come spiegato nell'esercizio precedente, si puo' riscrivere il limite come:

$$\left(\frac{10}{e}\right)^{\ln n} \cdot \frac{e^{\ln n}}{n^2+1} = \left(\frac{10}{e}\right)^{\ln n} \cdot \frac{n}{n^2+1} =$$
$$\left(\frac{10}{e}\right)^{\lg_{\frac{10}{e}} n \cdot \ln \frac{10}{e}} \cdot \frac{n}{n^2+1} = n^{\ln \frac{10}{e}} \frac{n}{n^2+1} \to \infty$$

l'ultimo passaggio tiene conto del fatto che $\ln \frac{10}{e} > 1$.

(v) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \tan \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \tan \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\tan \frac{1}{n}} n \tan \frac{1}{n}} = e.$
Si e' tenuto conto dei limiti notevoli $\lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$ se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, e $\lim_{n\to\infty} n \sin \frac{1}{n} = 1$.

(vi) $\lim_{n\to\infty} \arctan(n^2 - 1) \frac{\cos 2n\pi}{n\pi} = \frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{n} \to 0$

(vii) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n+\ln n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n\left(\frac{3}{2}\right)} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n\left(\frac{\ln n}{2n}\right)} \to$
$\to\ e^{\frac{3}{2}} \cdot \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{2n}} \ \to\ e^{\frac{3}{2}}.$

(viii) $\lim_{n\to\infty} \frac{2+n^2}{n^3} \cot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+n^2}{n^3} \frac{\cos \frac{1}{n}}{\sin \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+n^2}{n^2} \lim_{n\to\infty} \frac{\cos \frac{1}{n}}{n \sin \frac{1}{n}} = 1.$

(ix) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n}\right)^{\cot \frac{1}{n}}$
Utilizzando il risultato dell'esercizio precedente si ottiene:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2+n^2}{n^3}\right)^{\frac{n^3}{2+n^2}}\right]^{\frac{2+n^2}{n^3}\cot\frac{1}{n}} \quad\to\quad e.$$

(x) risultato $= 1$
(xi) risultato $= 0$
(xii) risultato $= 1$
$(xiii)$ risultato $= 0$
(xiv) risultato $= +\infty$
(xv) risultato: per $x \in \mathbf{Z}$ la successione é identicamente uguale ad 1, mentre per tutti gli altri x reali tende a 0.
(xvi) riscriviamo il limite per sfruttare i limiti notevoli:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\sin\frac{1}{n}(\ln n)^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}\frac{n}{n+1}\frac{(\ln n)^2}{n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^2}{n+1} = 1\cdot 1\cdot 0 = 0.$$

$(xvii)$ utilizziamo il prodotto notevole $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ con $a = (n+2)^{\frac{1}{3}}$ e $b = n^{\frac{1}{3}}$. Quindi il limite diventa

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{(n+2-n)}{(n+2)^{\frac{2}{3}}+(n(n+2))^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{(n+2)^{\frac{2}{3}}+(n(n+2))^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}.$$

Abbiamo ottenuto un quoziente di polinomi di grado 1 al numeratore e $\frac{2}{3}$ al denominatore, quindi il limite é 0.

$(xviii)$ riscriviamo il limite per sfruttare i limiti notevoli:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n(n-1)}{n+1}} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{n+1}} = +\infty.$$

(xix) vogliamo ricondurci ad una forma del tipo $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{\frac{1}{a_n}}$ con $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, e poi usare il limite notevole $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$. Risolviamo quindi l' equazione

$$\frac{1}{a_n} = 1 - \frac{n^2+n}{n^2-n+2},$$

che é verificata se $a_n = \frac{n^2-n+2}{2n-2}(\to\infty \text{ per } n\to\infty)$. Quindi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{n^2-n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2n-2}{n^2-n+2}\right)^{a_n}\right]^{\frac{n}{a_n}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_n}} = e^2.$$

(xx) riscriviamo il limite come

$$\lim_{n\to\infty} (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 3\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Usiamo in teorema dei carabinieri:

$$3 \le 3\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right)^{\frac{1}{n}} \le 3(1+1)^{\frac{1}{n}} \to 3 \cdot 1$$

Pertanto tutta la successione tende a 3.
(xxi) riscriviamo il limite come

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \cdot e = 1.$$

$(xxii)$ usiamo il Teorema dei Carabinieri per provare che il limite é 0.

$$\frac{n^2+2}{n} - \sqrt{n^2+4} = n + \frac{2}{n} - \sqrt{n^2+4} \le n + \frac{2}{n} - \sqrt{n^2} = \frac{2}{n} \to 0.$$

D'altra parte si ha $n^2 + 4 < n^2 + 4 + \frac{2}{n^2} = \left(n + \frac{2}{n}\right)^2$. Quindi:

$$n + \frac{2}{n} - \sqrt{n^2+4} > n + \frac{2}{n} - \left(n + \frac{2}{n}\right) = 0.$$

Esercizio 2
Richiamiamo la definizione di limite:

$$L \text{ finito: } \lim_{n\to\infty} a_n = L \ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \overline{n} : \ |a_n - L| < \varepsilon \ \forall \ n > \overline{n}.$$

$$L \text{ infinito: } \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \ \Leftrightarrow \forall M > 0 \ \exists \overline{n} : \ a_n > M \ \forall \ n > \overline{n}.$$

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 8n + 4}{n-4} = +\infty \ \Leftrightarrow \ \forall M > 0 \ \exists \overline{n} : \frac{n^2 - 8n + 4}{n-4} > M \ \Leftrightarrow (\text{ per } n > 4)$

$$n^2 - 8n + 4 > Mn - 4M,$$

risolvendo l'equazione di secondo grado, troviamo che la disuguaglianza é verificata per valori di n esterni all' intervallo delle radici, che chiameremo x_1 e x_2, quindi se $n > x_2 = \overline{n}$ (se $x_2 > x_1$) sicuramente la disuguaglianza é verificata e cosí la definizione di limite.
$(b\ )$ $\lim_{n\to\infty} \ln(1 + \frac{1}{n}) = 0 \ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \overline{n}$:

$$\left|\ln(1 + \frac{1}{n})\right| < \varepsilon \ \forall n > \overline{n}.$$

Tenendo conto che $\ln(1+\frac{1}{n}) > 0$, questa disuguaglianza é verificata se

$$1+\frac{1}{n} < e^{\varepsilon} \ \Leftrightarrow n > \frac{1}{e^{\varepsilon}-1} = \overline{n}.$$

(c) $\lim_{n\to\infty} e^{1+\frac{1}{n}} = e \ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \overline{n}$:

$$\left| e^{1+\frac{1}{n}} - e \right| < \varepsilon.$$

Tenendo conto che $e^{1+\frac{1}{n}} > e$, si ha

$$e^{1+\frac{1}{n}} - e < \varepsilon \ \Leftrightarrow e^{\frac{1}{n}} < 1+\frac{\varepsilon}{e} \ \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \ln\left(1+\frac{\varepsilon}{e}\right) \ \Leftrightarrow n > \frac{1}{\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{e}\right)} = \overline{n}.$$

Esercizio 3

Consideriamo la successione:

$$x_n = a^n \frac{(-1)^n}{(n^2+1)\sin\frac{1}{n^2}}$$

la frazione tende a $\frac{(-1)^n}{1}$, per cui il limite é sicuramente indeterminato se $|a| \geq 1$. Infatti se $a = \pm 1$ $\lim_{n\to\infty} x_n = (-1)^n$, se se $|a| > 1$ $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$. Invece se $|a| < 1$ il limite é 0.

Esercizio 5

Se la successione a_n ammette limite, tutte le successioni estratte devono ammettere lo stesso limite, quindi un' implicazione é ovvia. D' altra parte, se a_{2k} e a_{2k-1} convergono allo stesso limite l, si avrá:

$$|a_{2k} - l| < \varepsilon \ \forall n > n_1,$$

$$|a_{2k-1} - l| < \varepsilon \ \forall n > n_2.$$

Quindi, se $n > \max(2n_1, 2n_2 - 1)$, risulta $|a_n - l| < \varepsilon$, quindi a_n tende a l.
Osservazione importante: in generale se due sottosuccessioni estratte da una successione data tendono al medesimo limite l, non é affatto detto che la successione di partenza converga ad l. Peró, se le successioni estatte sono tali da esaurire tutti i possibili indici naturali, come accade per le successioni degli indici pari e dispari, allora si puó concludere che la successione di partenza tende allo stesso limite delle due sottosuccessioni.

Esercizio 6

Essendo monotone, le due successioni a_{2n} e a_{2n-1} sicuramente ammettono limite, finito o infinito. Per ipotesi

$$\lim_{n\to\infty}(a_{2n} - a_{2n-1}) = 0 \ \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

quindi grazie all' esercizio precedente, a_n ammette limite ed esso é uguale ad l.

Esercizio 7
Vogliamo trovare una successione a_n che ammette limite, ma le due sottosuccessioni degli indici pari e dispari, pur essendo monotone, quindi ammettendo limite, non verificano la proprietá $\lim_{n\to\infty}(a_{2n} - a_{2n-1}) = 0$. Basta scegliere $a_n = n$, essa ha limite $+\infty$, ma

$$\lim_{n\to\infty}(a_{2n} - a_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} 2n - 2n + 1 \equiv 1.$$