Am1 secondo esonero
10 gennaio 2006

Esercizio 1.
Calcolare il limite della seguente successione

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n e^{\log_2 n}}{(1+n)|\arctan n|}$$

Considerando che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1, \ \lim_{n\to\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2}, \ \lim_{n\to\infty} e^{\log_2 n} = +\infty,$$

il limite della successione iniziale é $+\infty$.
Dimostrare, usando la definizione di limite, che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3}{n+1} = +\infty$$

Si deve provare che $\forall M > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{R} : \ \frac{3n^3}{n+1} > M \ \forall n \geq \nu$.
Pertanto:

$$\frac{3n^3}{n+1} > \frac{3n^2}{n+1} > M \ \Leftrightarrow \ \frac{3n^2 - Mn - M}{n+1} > 0,$$

quindi si ha, considerando che il denominatore é positivo,

$$n = \frac{M \pm \sqrt{M^2 + 12M}}{6}$$

per $n > \frac{M+\sqrt{M^2+12M}}{6} = \nu$, si ha $\frac{3n^3}{n+1} > M$.

Esercizio 2.
Studiare il comportamento della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 e^{n^2 x}}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

La serie é a termini positivi, usando in confronto asintotico si deduce che la serie data é equivalente alla serie di termine generico $b_n = n^2 e^{n^2 x}$. A questo punto, usando in criterio della radice ennesima su $\sum b_n$, si ha che la serie converge se $e^{nx} < 1$, ovvero se $x < 0$.

Esercizio 3.
Calcolare massimo e minimo limite della seguente successione (giustificare le affermazioni)

$$a_n = (1^{2n} + (-1)^n)2^n$$

Ovviamente si ha che $a_n = (1 + (-1)^n)2^n$. Poiché se n é pari $a_{2k} = 2 \cdot 2^{2k} \to +\infty$, si deduce immediatamente che il massimo limite é $+\infty$ (se la successione di partenza ammette una sottosuccessione che diverge a piú infinito, sicuramente il massimo limite é $+\infty$.). Se $n = 2k + 1$ si ha $a_{2k+1} \equiv 0$. Avendo trovato una sottosuccessione che tende a zero, se proviamo che 0 é anche un minorante definitivo, potremo concludere che zero 'e minimo limite.

$$a_n = 0 \text{ per n pari, } 2 \cdot 2^n \text{ per n dispari}$$

quindi si ha sempre $a_n \geq 0$.

Esercizio 4.
Dimostrare ENTRAMBE LE PROPOSIZIONI SEGUENTI:

Teorema 0.0 *Una successione a_n é convergente se e solo se é una successione di Cauchy*

Ricordiamo che si definisce successione di Cauchy una successione per cui

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \ \nu \in \mathbb{R} : \forall n, m > \nu, \ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Teorema 0.1 *(Criterio del rapporto per serie a termini positivi) Sia* $\sum a_n$ *una serie a termini positivi, e supponiamo che risulti*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

Se $L < 1$ *la serie* $\sum a_n$ *converge, mentre se* $L > 1$ *la serie* $\sum a_n$ *diverge.*