Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2003/2004
AL2 - Algebra 2, gruppi, anelli e campi
Tutorato - Soluzioni
13 ottobre 2003

1. Provare che l'insieme delle matrici non nulle della forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ è, rispetto al prodotto righe per colonne, un gruppo isomorfo al gruppo moltiplicativo $\mathbb{C}^\star$.

Sia X tale insieme. Prima di tutto bisogna provare che si tratta di un sottogruppo di $GL_2(\mathbb{R})$. $X \subseteq GL_2(\mathbb{R})$ visto che se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in X$ allora $det(A) = a^2+b^2$. Dato che $(a,b) \neq (0,0)$ allora $det(A) > 0$, e quindi A è invertibile. Se $B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$ allora $AB^{-1} = 1/(c^2+d^2) \begin{pmatrix} ac+bd & bc-ad \\ ad-bc & ac+bd \end{pmatrix} \in X$ e quindi X è sottogruppo di $GL_2(\mathbb{R})$. Sia ora $\phi : X \to \mathbb{C}^\star$ l'applicazione definita come $\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right) = a + ib \in \mathbb{C}^\star$. ϕ è un omomorfismo di gruppi dato che $\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\right) = \phi\left(\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & ac-bd \end{pmatrix}\right) = ac-bd+i(ad+bc) = (a+ib)(c+id) = \phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right)\phi\left(\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\right)$ Inoltre ϕ è suriettivo. Per far vedere che ϕ è un isomorfismo ora basta far vedere che è iniettivo:$\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right) = a + ib = 1 \Rightarrow a = 1 \wedge b = 0$. Perció $Ker(\phi) = \mathbb{I}$ e quindi ϕ è iniettivo.

2. Sia $(G, +)$ un gruppo abeliano. Provare che per ogni $m \in \mathbb{Z}$ l'applicazione θ_m definita da $\theta_m(g) = mg$, per ogni $g \in G$, è un omomorfismo di G in se stesso. Se $m > 1$, cosa si può dire della suriettività di θ_m?

Basta verificare che $\forall a, b \in G\ \theta_m(a+b) = \theta_m(a)+\theta_m(b)$. $\theta_m(a+b) = m(a+b)$ cioè $(a+b) + ... + (a+b)$ m volte. Data la commutativitá del gruppo segue che $m(a+b) = ma + mb = \theta_m(a) + \theta_m(b)$.
Se $m > 1$ della suriettività di θ_m non si può dire nulla. Ad esempio se $G = \mathbb{Z}$ θ_m non è mai suriettiva, se invece $G = \mathbb{Q}$ allora θ_m è sempre suriettiva.

3. Siano G un gruppo ed N_1 e N_2 suoi sottogruppi normali. Provare che

1. $N_1 \cap N_2$ è un sottogruppo normale di G;

2. N_1N_2 è un sottogruppo normale di G;

3. se inoltre $N_1 \cap N_2 = \langle e \rangle$, allora per ogni $n_1 \in N_1$ e per ogni $n_2 \in N_2$ si ha che $n_1n_2 = n_2n_1$.

1. Sia $g \in G, n \in N_1 \cap N_2$. Poiché N_1 e N_2 sono normali si ha che $gng^{-1} \in N_1 \cap N_2$ e quindi $N_1 \cap N_2$ è un sgr. normale di G.

2. Dato che N_1 e N_2 sono sgr. normali di G si ha che N_1N_2 è un sgr. di G. Sia poi $g \in G$. Allora sfruttando prima la normalità di N_1 e poi quella di N_2 si ha: $gN_1N_2 = N_1gN_2 = N_1N_2g$ e perciò N_1N_2 è normale in G.

3. $n_1n_2 = n_2n_1 \Leftrightarrow x := n_1n_2n_1^{-1}n_2^{-1} = e$. Data la normalità di N_1 si ha che $n_2n_1^{-1}n_2^{-1} \in N_1$ e perciò $x \in N_1$. Data la normalità di N_2 si ha che $n_1n_2n_1^{-1} \in N_2$ e perciò $x \in N_2$. Quindi $x \in N_1 \cap N_2 \Rightarrow x = e$.

4. In A_4 si considerino i seguenti sottogruppi:

1. $H = \langle (12)(34) \rangle$;

2. $V = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.

Verificare che

1. $H \trianglelefteq V$, $V \trianglelefteq A_4$ e H non è normale in A_4.

2. Stabilire a quali gruppi sono isomorfi A_4/V e V/H.

1. $H \trianglelefteq V$ semplicemente perché V è un gruppo abeliano. Per verificare invece che $V \trianglelefteq A_4$ bisogna controllare che $\forall g \in A_4 \; gVg^{-1} \subseteq V$. In realtà basta verificarlo per un sottoinsieme di generatori di A_4, ad esempio per (123) e (124). Infine H non è normale in A_4 dato che $(123)\;(12)(43)\;(132) = (23)(14) \notin H$.

2. Dato che A_4, V, e H sono gruppi finiti si ha che $card(A_4/V) = card(A_4)/card(V) = 12/4 = 3$. Perciò A_4/V è un gruppo ciclico con 3 elementi. Analogamente $card(V/H) = 2$ e quindi V/H è un gruppo ciclico con 2 elementi.

5. Determinare le classi coniugate di A_4.

1. Calcolare il numero delle classi coniugate di S_6 e per ciascuna classe coniugata scrivere esplicitamente un rappresentante.

2. Trovare un elemento $\tau \in S_6$ tale che

$$\tau(163)(24)\tau^{-1} = (12)(435).$$

Le classi coniugate di A_4 sono:

1. $\{id\}$

2. $\{(123), (243), (134), (142)\}$

3. $\{(132), (143), (124), (234)\}$

4. $\{((12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

Si noti che elementi che in A_4 non sono coniugati lo possono essere però in S_4 (ad esempio (123) e (132)). Naturalmente elementi che sono coniugati in A_4 sono necessariamente coniugati anche in S_4.

1. Il numero delle classi coniugate di S_6 corrisponde al numero delle partizioni di 6, ciascuna partizione indicando la struttura in cicli disgiunti delle permutazioni della rispettiva classe di coniugio. Quindi:

   (a) $6 = 6 \to$ rappresentante corrispondente: (123456)
   (b) $6 = 5 + 1 \to$ rappresentante corrispondente: (12345)
   (c) $6 = 4 + 2 \to$ rappresentante corrispondente: (1234)(56)
   (d) $6 = 4 + 1 + 1 \to$ rappresentante corrispondente: (1234)
   (e) $6 = 3 + 3 \to$ rappresentante corrispondente: (123)(456)
   (f) $6 = 3 + 2 + 1 \to$ rappresentante corrispondente: (123)(45)
   (g) $6 = 3 + 1 + 1 + 1 \to$ rappresentante corrispondente: (123)
   (h) $6 = 2 + 2 + 2 \to$ rappresentante corrispondente: (12)(34)(56)
   (i) $6 = 2 + 2 + 1 + 1 \to$ rappresentante corrispondente: (12)(34)
   (j) $6 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1 \to$ rappresentante corrispondente: (12)
   (k) $6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \to$ rappresentante corrispondente: id

2. τ è ad esempio (214)(356).