Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2013/2014
TN410 - Introduzione alla teoria dei numeri
Esercizi 1

1. Provare che se a e b sono numeri interi positivi e $a^2|b^2$, allora $a|b$.
2. Provare che se $n > 1$ è un numero naturale dispari, allora
$$1 + 2 + \cdots + (n-1) \equiv 0 \pmod{n}.$$
3. Provare che se $n > 1$ è un numero naturale dispari o se $n > 1$ è un numero naturale multiplo di 4, allora
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 \equiv 0 \pmod{n}.$$
4. Provare che 3 è l'unico numero primo p tale che anche $p^2 + 2$ è primo.
5. Provare che se a è un intero pari, allora $a^2 \equiv 0 \pmod 4$ e che se se a è un intero dispari, allora $a^2 \equiv 1 \pmod 4$
6. Provare che se a è un intero dispari, allora $a^2 \equiv 1 \pmod 8$
7. Siano m ed n numeri naturali tali che $m > 1$, $n > 1$ e $n|m$. provare che se a e b sono numeri interi tali che $a \equiv b \pmod m$, allora $a \equiv b \pmod n$.
8. (a) Verificare che l'insieme $\left\{0, 1, 2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^9\right\}$ è un sistema completo di residui modulo 11.
   (b) Stabilire se l'insieme $\left\{0, 1^2, 2^2, 3^2, \cdots, 10^2\right\}$ è un sistema completo di residui modulo 11.
   (c) Stabilire se l'insieme $\left\{3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6\right\}$ è un sistema ridotto di residui modulo 7.
9. Utilizzando il principio di induzione matematica, provare che se m è un intero positivo, allora:
   (a) $4^m \equiv 1 + 3m \pmod 9$;
   (b) $5^m \equiv 1 + 4m \pmod{16}$.
10. Per ciascuna delle seguenti equazioni diofantee lineari, stabilire la risolubilità e nei casi positivi determinare tutte le soluzioni:
    (a) $11X + 4Y = 3$
    (b) $6X - 15Y = 7$
    (c) $4X + 2Y = 1001$
    (d) $58X - 134Y = 10$.

11. Determinare tutte le eventuali soluzioni incongruenti delle seguenti congruenze lineari:

    (a) $7X \equiv 10 \pmod{18}$;

    (b) $3X \equiv 14 \pmod{15}$;

    (c) $10X \equiv 0 \pmod{40}$;

    (d) $6 \equiv 18 \pmod{38}$;

    (e) $7X \equiv 11 \pmod{23}$;

    (f) $12X \equiv 24 \pmod{44}$.

    (g) $10X \equiv 355 \pmod{4115}$.

12. Provare che se p è un numero primo, allora le uniche soluzioni della congruenza $X^2 \equiv X \pmod{p}$ sono gli interi x tali che $x \equiv 0 \, , \, 1 \pmod{p}$.

13. Provare che se p è un numero primo, allora le uniche soluzioni della congruenza $X^2 \equiv X \pmod{p^k}$ con $k \geqslant 1$ sono gli interi x tali che $x \equiv 0 \, , \, 1 \pmod{p^k}$