

**Università degli Studi Roma Tre**  
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2013/2014**  
**TN410 - Introduzione alla teoria dei numeri**  
**Esercitazione 4**  
**9 maggio 2014**

1. (2 esonero A.A. 2011/2012) Si consideri la funzione moltiplicativa  $F = \sigma * \varphi$ .
  - (a) Calcolare  $F(35)$  e  $F^{-1}(35)$ .
  - (b) Sia  $f$  la funzione aritmetica determinata dalla formula di inversione di Möbius. Calcolare  $f(35)$ .
2. (2 esonero A.A. 2011/2012) Provare che per ogni intero positivo  $n$  si ha:

$$\sum_{d|n} \frac{n\sigma(d)}{d} = \sum_{d|n} d\tau(d)$$

3. Provare che:
  - (a)  $\varphi = \mathbf{e} * \mu$ ;
  - (b)  $\tau * \mu = \mathbf{1}$ ;
  - (c)  $\sigma * \mu = \mathbf{e}$ .
4. Provare che se  $f$  è una funzione aritmetica totalmente moltiplicativa non identicamente uguale a 0, allora  $f(1) = 1$  e  $f^{-1} = \mu f$ .
5. Provare che:
  - (a)  $\tau^{-1} = \mu * \mu$ ;
  - (b)  $\sigma^{-1} = \mu \mathbf{e} * \mu$ ;
  - (c)  $\varphi^{-1} = \mu \mathbf{e} * \mathbf{1}$ .
6. Provare se  $f$  è una funzione aritmetica moltiplicativa non identicamente uguale a 0, allora:
  - (a)  $\mu f * \mathbf{1}$  è moltiplicativa;
  - (b)  $(\mu f * \mathbf{1})(n) = \prod_{i=1}^r (1 - f(p_i))$  con  $n = p_1^{e-1} \cdots p_r^{e-r}$ .