Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2013/2014
TN410 - Introduzione alla teoria dei numeri
Appello X
16 settembre 2014

*Cognome*___________________ *Nome*________________________

*Numero di matricola*__________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. E' consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

1. Trovare, al variare del parametro λ $(0 \leq \lambda \leq 12)$, le soluzioni del seguente sistema lineare in due variabili:

$$\begin{cases} 3X + \lambda Y \equiv 1 \pmod{13} \\ \lambda X + Y \equiv 3 \pmod{13} \end{cases}$$

2. Sia p un numero primo dispari; siano a e b due numeri interi positivi tali che $a + b = p - 1$. Provare che

$$a!b! + (-1)^a \equiv 0 \pmod{p}.$$

3. Siano p un numero primo dispari ed r un numero intero primo con p. Dimostrare che r è una radice primitiva modulo p se e solo se $r^{\frac{p-1}{q}}$ non è congruo ad 1 $\pmod{p}$ per tutti i divisori primi positivi q di $p-1$.

4. (a) Calcolare il simbolo di Jacobi $\left(\frac{761}{89265}\right)$, sapendo che 761 e 541 sono numeri primi.

   (b) Stabilire se la congruenza quadratica $X^2 \equiv 701 \bmod(87395)$ è risolubile.

5. (a) Trovare tutte le radici primitive modulo 11.
   (b) Se rè la radice primitiva minima positiva modulo 11, determinare $ind_r(a)$ per ogni $1 \leqslant a \leqslant 10$.
   (c) Trovare per quali valori di a con $1 \leqslant a \leqslant 10$ la congruenza

$$4X^5 \equiv 8a \pmod{11}$$

è risolubile e per il minimo di questi valori di a risolvere la congruenza data.

6. Sia $n > 1$ un numero intero. Provare che:

   (a) se n è un numero primo, allora $\frac{\varphi(n)\sigma(n)+1}{n}$ è un numero intero;

   (b) se n è divisibile per il quadrato di un numero primo, allora $\frac{\varphi(n)\sigma(n)+1}{n}$ non è un numero intero.