Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2013/2014
TN410 - Introduzione alla teoria dei numeri
Seconda prova di valutazione intermedia
27 maggio 2014

*Cognome*___________________ *Nome*________________________

*Numero di matricola*___________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. E' consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

1. Si consideri la congruenza quadratica:

$$X^2 \equiv 361 \pmod{94864} \qquad (*)$$

   (a) Verificare che la congruenza $(*)$ è risolubile e deterrminare il numero delle sue soluzioni.
   (b) Trovare almeno 3 soluzioni della congruenza $(*)$.

2. Calcolare i seguenti simboli di Legendre:

   (a) $\left(\frac{27645}{991}\right)$;

   (b) $\left(\frac{10249}{1033}\right)$;

   (c) $\left(\frac{-297}{587}\right)$.

3. Siano p un numero primo dispari ed a un numero naturale tale che $1 \leqslant a \leqslant p-2$. Con a^* si denota un inverso aritmetico di a mod p.

   Provare che:

   (a)
   $$\left(\frac{a(a+1)}{p}\right) = \left(\frac{a^*+1}{p}\right)$$

   (b)
   $$\sum_{a=1}^{p-2} \left(\frac{a(a+1)}{p}\right) = -1$$

4. (a) Stabilire quali dei seguenti numeri sono somma di due quadrati:
    i. 127413;
    ii. 31279 ;
    iii. 3564.
   (b) Scrivere i numeri del punto precedente, quando possibile, come somma di due quadrati.

5. Sia $n = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{e_r}$ la fattorizzazione in primi distinti di un numero naturale $n \geqslant 2$ con $e_i \geqslant 1$ per $1 \leqslant i \leqslant r$.

   Si consideri la seguente funzione aritmetica:

$$\omega(n) := \begin{cases} 0 & \text{se } \; n = 1 \\ \\ r & \text{se } n \geqslant 2 \end{cases} .$$

   (a) Verificare che ω è additiva, cioè che presi comunque $n,\ m \in \mathbb{N}^+$ tali che $\mathrm{MCD}(n, m) = 1$, allora $\omega(nm) = \omega(n) + \omega(m)$.

   (b) Sia f la funzione aritmetica definita da

$$f(n) := i^{\omega(n)}$$

      i. Verificare che f è moltiplicativa.
      ii. Calcolare $(f * \mu)(42)$ e $(f * \mu)(72)$.
      iii. Calcolare $(f * \mu)^{-1}(42)$ e $(f * \mu)^{-1}(72)$

6. **(a)** Scrivere come frazione continua $\frac{687}{202}$;
   (b) calcolarne tutte le convergenti;
   (c) dedurre le soluzioni dell'equazione diofantea

$$687X - 202Y = 6$$