Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2012/2013
AL110 - Algebra 1
Tutorato 5 (25 ottobre 2012)

1. Usando l'Algoritmo Euclideo delle divisioni successive, calcolare il $\mathrm{MCD}(2424, 772)$ ed una identità di Bézout.

2. Utilizzando il fatto che il $\mathrm{MCD}(a, b)$ divide $a - b$, trovare il $\mathrm{MCD}(1962, 1965)$ e il $\mathrm{MCD}(1961, 1965)$.

3. Sia n un numero naturale; trovare $\mathrm{MCD}(n, n + 1)$ e il $\mathrm{MCD}(n - 1, n)$.

4. Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha :
   (a) $7 \mid 2^{3n} - 1$;
   (b) $8 \mid 3^{2n} + 7$;
   (c) $3 \mid 2^n + (-1)^{n+1}$;

5. Verificare che per ogni numero intero a si ha che $3|a(2a^2 + 7)$.

6. Provare che se a è un numero intero dispari, allora $32|(a^2 + 3)(a^2 + 7)$.

7. Provare che:
   (a) Il quadrato di ogni numero intero dispari è della forma $8k + 1$.
   (b) Se a è un qualsiasi intero dispari allora $24|a(a^2 - 1)$.
   (c) Se a e b sono interi dispari, allora $8|(a^2 - b^2)$.
   (d) Provare che se a è un numero intero tale che $2 \nmid a$ e $3 \nmid a$, allora $24 \mid (a^2 - 1)$.
   (e) Se a è un qualsiasi numero intero, allora $360|a^2(a^2 - 1)(a^2 - 4)$:

8. Stabilire quali delle seguenti equazioni diofantee sono risolubili e per quelle risolubili determinarne le soluzioni intere:
   (a) $36X + 42Y = 18$;
   (b) $73X - 31Y = 10$;
   (c) $1000X - 100Y = 37$.

9. (Eulero, 1770) Scrivere 100 come somma di due numeri naturali uno divisibile per 7 e l'altro per 11.

10. Sia p un numero primo.
    (a) Provare che se $p|a^n$ con $a \in \mathbb{Z}$ ed $n \in \mathbb{N}^+$, allora $p^n|a^n$.
    (b) Siano a, b numeri interi non entrambi nulli tali che $\mathrm{MCD}(a, b) = p$. Quali sono i possibili valori per $\mathrm{MCD}(a^2, b^2)$, $\mathrm{MCD}(a^2, b)$ e $\mathrm{MCD}(a^3, b^2)$?

11. Sia $n > 1$ un numero naturale non della forma $6k + 3$; provare che $n^2 + 2^n$ non è primo.
    (Sugg.: verificare che 2 oppure 3 divide $n^2 + 2^n$.)