Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2012/2013
AL110 - Algebra 1
Tutorato 4 (18 ottobre 2012)

1. Sia $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ l'applicazione definita da $f\big((a,b)\big) = a + 7b + 11$.

   Nel tutorato precedente è stata trovata Im f e verificato che f non è iniettiva.

   Determinare la relazione nucleo di f ed esplicitare la decomposizione di f.

2. Si consideri l'applicazione $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = 2x^2 + 4x + 2$.

   (a) Determinare $\mathrm{Im}(g)$.

   (b) Descrivere la relazione nucleo di g, k_g.

   (c) Determinare $\mathbb{R}/k_g$.

3. Nell'insieme dei numeri naturali positivi si consideri la seguente relazione d'equivalenza ρ :

   $n\rho m$ se e solo se n e m hanno lo stesso numero di cifre nella usuale scrittura decimale.

   (*i*) Determinare $[1]_\rho$, $[10]_\rho$ e $[10^k]_\rho$ con $k \geq 2$.

   (*ii*) Determinare l'insieme quoziente $\mathbb{N}^+/\rho$.

4. Sia $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ l'applicazione definita da:

$$(x, y) \longmapsto 253x - 65y + 137$$

   (a) Stabilire se l'applicazione f è iniettiva.

   (b) Trovare $\mathtt{Im}(f)$.

   (c) Sia k_f la relazione nucleo di f. Trovare tutti gli elementi di $[(1, -3)]_{k_f}$.

5. Nell'insieme $X := \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ si consideri la seguente relazione binaria ρ:

$$(a,b)\rho(c,d) :\Longleftrightarrow ad - bc = 0$$

   (a) Verificare che ρ è una relazione d'equivalenza in X.

   (b) Descrivere le classi d'equivalenza $[(1,0)]_\rho$ e $[(1,1)]_\rho$.

   (c) Descrivere la classe d'equivalenza $[(a,b)]_\rho$ per ogni $(a,b) \in X$.

   (d) **FAC.** Si consideri l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (a,b) & \longmapsto & \left(\frac{ab}{a^2+b^2}, \frac{b^2}{a^2+b^2}\right) \end{array}$$

   i. Provare che

$$\mathtt{Im}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - y = 0\}$$

ii. Provare che la relazione nucleo k_f coincide con la relazione ρ.

6. Utilizzando la divisione in $\mathbb{Z}$ stabilire che:
   (a) ogni numero intero dispari è della forma $4k+1$ oppure $4k+3$ con $k \in \mathbb{Z}$;
   (b) il quadrato di ogni numero intero è della forma $3k$ oppure $3k+1$ con $k \in \mathbb{Z}$;
   (c) il cubo di ogni numero intero è della forma $9k$ oppure $9k+1$ oppure $9k+8$ con $k \in \mathbb{Z}$;
   (d) il cubo di ogni numero intero è della forma $7k$ oppure $7k \pm 1$ con $k \in \mathbb{Z}$;
   (e) un intero che è sia un quadrato che un cubo è della forma $7k$ oppure $7k+1$ con $k \in \mathbb{Z}$.

7. Siano a, b interi non entrambi nulli. Provare che le seguenti condizioni sono equivalenti:
   (a) $a \mid b$;
   (b) $\mathrm{MCD}(a, b) = |a|$;
   (c) $\mathrm{mcm}(a, b) = |b|$.

8. Provare che ogni numero intero della forma $6k+5$ con $k \in \mathbb{Z}$ è anche della forma $3h+2$ con $h \in \mathbb{Z}$, e che il viceversa non è vero.

9. Siano a, b, c numeri interi non nulli. Provare che:
   (a) Se $\mathrm{MCD}(a, b) = 1$ e $\mathrm{MCD}(a, c) = 1$, allora $\mathrm{MCD}(a, bc) = 1$.
   (b) Se $\mathrm{MCD}(a, b) = 1$, allora per ogni numero naturale $n \geq 2$ si ha che $\mathrm{MCD}(a^n, b)$=$\mathrm{MCD}(a, b^n) = 1$.
   (c) $\mathrm{MCD}(ac, bc) = |c|\mathrm{MCD}(a, b)$.
   (d) Se $\mathrm{MCD}(a, b) = 1$, allora $\mathrm{MCD}(ac, b)$=$\mathrm{MCD}(c, b)$.
   (e) Se $\mathrm{MCD}(a, b) = 1$, allora per ogni numero naturale $n \geq 2$ si ha che $\mathrm{MCD}(a^n, b^n) = 1$.

10. Provare che per ogni numero intero n
   (a) $2 \mid n(n+1)$;
   (b) $3 \mid n(n+1)(n+2)$;
   (c) $4 \nmid n^2+2$.