Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2012/2013
AL110 - Algebra 1
Tutorato 11 (13 dicembre 2012)

1. Trovare tutti i numeri primi dispari p per i quali $X - \overline{2}$ è un fattore di $X^4 + X^3 + X^2 - X + \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_p[X]$.

2. Utilizzando il teorema del resto, stabilire se $X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$ divide in $\mathbb{Q}[X]$ i seguenti polinomi: $X^3 - 4X$, $\quad X^2 + 2X - 1$, $\quad X^{100} - 4X^{98} + X + 2$.

3. Siano $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ed $\alpha \in \mathbb{Q} - \{0\}$. Provare che $\alpha X + \beta$ divide $f(X)$ se e solo se $X + \frac{\beta}{\alpha}$ divide $f(X)$.

4. Utilizzando il teorema del resto, stabilire se in $\mathbb{Q}[X]$:
   (a) $X - 2$ divide $X^5 - 4X^4 - 4X^3 - X^2 + 4$;
   (b) $2X - 1$ divide $X^5 + 2X^4 - 3X^2 + 1$.

5. Sia $f(X) = X^5 - 36X^4 - X^3 + X^2 - 2 \in \mathbb{Z}[X]$. Calcolare il resto della divisione di $f(X)$ per $X - 37$.

6. Trovare tutte le radici di:
   (a) $f(X) = X^2 + 1$ in $\mathbb{Z}_2[X]$
   (b) $g(X) = X^3 + \overline{2}X + \overline{2}$ in $\mathbb{Z}_7[X]$
   (c) $f(X)g(X)$ dove $f(X) = X^3 + X^2 + \overline{5}$ e $g(X) = \overline{3}X^2 + \overline{2}X$ in $\mathbb{Z}_7[X]$.

7. Provare che per ogni numero naturale $n \geq 2$ il polinomio $X^n - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ non ha radici razionali.

8. Stabilire quali dei seguenti polinomi sono irriducibili in $\mathbb{Q}[X]$:
   (a) $X^2 + 2$, $\quad X^2 - 2$, $\quad X^2 + 2X + 8$;
   (b) $X - \frac{2}{5}$, $\quad 2X - 5$;
   (c) $X^3 - 2$, $\quad 3X^3 + 2X + 1$;
   (d) $X^4 - 5X + 4$, $\quad X^4 + 1$.

9. Si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}[X] \subseteq \mathbb{Q}[X]$:
   $$f(X) = 2X^4 - 7X^3 + 5X^2 - 7X + 3, \;\; g(X) = 2X^3 + X^2 + X - 1.$$
   (a) Determinare tutte le eventuali radici in $\mathbb{Q}$ di $f(X)$ e di $g(X)$.
   (b) Utilizzando il metodo delle divisioni successive determinare in $\mathbb{Q}[X]$ il $\mathrm{MCD}(f(X), g(X))$ ed una identitá di Bézout per esso.

10. Sia p un numero primo; provare che per ogni $a \in \mathbb{Z}$ il polinomio $X^p + \overline{a}$ è *riducibile* in $\mathbb{Z}_p[X]$.

11. Decomporre in fattori irriducibili il polinomio $X^3 - 2$ in $\mathbb{Q}[X]$, in $\mathbb{R}[X]$ e in $\mathbb{C}[X]$.