**Università degli Studi Roma Tre**
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2012/2013**
**AL110 - Algebra 1**
**Esercitazione del 5 ottobre 2012)**

1. Siano i numeri $a_n$ definiti induttivamente da $a_1 = 11$, $a_2 = 21$ e $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ per tutti i numeri naturali $n \geqslant 3$. Utilizzando il principio di induzione ampia, si dimostri che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ si ha :

$$a_n = 5 \cdot 2^n + 1$$

2. Siano i numeri $a_n$ definiti induttivamente da $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ per tutti i numeri naturali $n \geqslant 4$.

   Utilizzando il principio di induzione ampia provare che per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ si ha che $a_n < 2^n$.

3. Utilizzando il principio di induzione si dimostri che:

   (a) per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ si ha :

$$\sum_{k=1}^{n} k3^k = \frac{3}{4}\left[(2n-1)3^n + 1\right];$$

   (b) per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ si ha che

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

   (c) per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ si ha :

$$\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} \cdots + 2^n\binom{n}{n} = 3^n$$

   (d) per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ si ha :

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \binom{2n+1}{3}$$

4. Sia $a$ un numero reale. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha :

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)$$