Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2012/2013
AL110 - Algebra 1
Esercitazione del 28 settembre 2012)

1. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha :
   (a) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;
   (b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
   (c) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
2. Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha :
$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$
3. Trovare una formula per
$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2$$
   con n numero naturale positivo e dimostrarla per induzione.
4. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha :
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$$
5. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha :
$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$
6. Si considerino i numeri C_n con $n \geqslant 1$ definiti induttivamente nel seguente modo:
$$C_1 = 1 \quad \text{e, per } n \geqslant 2, \quad C_n = \frac{2(2n-1)}{n+1} C_{n-1}$$
   Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha :
$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$