Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2012-2013
AL110 - Algebra 1
Esercitazione n.9 - 12 Dicembre 2012
Antonio Cigliola

Esercizio 1. Sia A un anello unitario. A si dice *booleano* se ogni suo elemento è *idempotente*, ovvero se per ogni $a \in A$ risulta che $a^2 = a$.
Sia A un anello booleano. Dimostrare che:

(i) per ogni $a \in A$: $a + a = 0$;

(ii) A ha caratteristica 2;

(iii) A è un anello commutativo.

Esercizio 2. Sia D un anello commutativo privo di divisori dello zero di cardinalità finita. Dimostrare che D è un campo.

Esercizio 3. Provare che l'assioma di commutatività della somma non è necessario per definire un anello unitario, ovvero provare che la proprietà di commutatività della somma può essere dedotta dagli altri assiomi che servono per definire un anello unitario.

Esercizio 4. Determinare il massimo comun divisore tra i polinomi $f(x)$ e $g(x)$ ed una identità di Bèzout, dove:

(i) $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$ e $g(x) = x^2 - x - 1$ in $\mathbb{Z}[x]$;

(ii) $f(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$ e $g(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$ in $\mathbb{Q}[x]$;

(iii) $f(x) = x^4 - 1$ e $g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ in $\mathbb{R}[x]$;

(iv) $f(x) = x^4 - 1$ e $g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ in $\mathbb{Z}_3[x]$.

Esercizio 5. Sia $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tale che $f(1) \neq 0$ ed $f(-1) \neq 0$. Sia α una sua radice intera. Provare che $\frac{f(1)}{1-\alpha} \in \mathbb{Z}$ e che $\frac{f(-1)}{1+\alpha} \in \mathbb{Z}$

Esercizio 6. Sia $f(x) = 7x^7 + 6x^6 + 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$. Calcolare $f(2)$ usando al regola di Ruffini.