Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2012-2013
AL110 - Algebra 1
Esercitazione n.8 - 5 Dicembre 2012
Antonio Cigliola

Esercizio 1. Sia X un insieme non vuoto e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle sue parti. Si indichi con $A\Delta B$ la *differenza simmetrica* tra due sottoinsiemi A e B di X, calcolata nel seguente modo:

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

(i) Dimostrare che $(\mathcal{P}(X),\ \Delta,\ \cap)$ è un anello commutativo unitario.

(ii) Verificare che $\mathcal{P}(X)$ è un anello booleano, ovvero che per ogni $A \in \mathcal{P}(X)$ risulta: $A^2 = A$.

(iii) Provare che $\mathcal{P}(X)$ è un dominio di integrità se e solo se X ha un solo elemento.

(iv) Provare che $\mathcal{P}(X)$ è un campo se e solo se X ha un solo elemento.

(v) Costruire la tabella additiva e la tabella moltiplicativa di $\mathcal{P}(X)$ nel caso in cui X ha due elementi.

(vi) Costruire la tabella additiva e la tabella moltiplicativa di $\mathcal{P}(X)$ nel caso in cui X ha tre elementi.

Esercizio 2. Sia R un anello commutativo unitario e sia $\mathcal{M}_{m,n}(R)$ l'insieme delle matrici di tipo $m \times n$ ad entrate in R. Date due matrici A, $B \in \mathcal{M}_{m,n}(R)$, si indichi con $A + B$ la somma delle matrici A e B definita entrata ad entrata. Dimostrare che $(\mathcal{M}_{m,n}(R), +)$ è un gruppo abeliano.

Esercizio 3. Sia R un anello commutativo unitario e sia $\mathcal{M}_n(R)$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine n ad entrate in R. Date due matrici A, $B \in \mathcal{M}_n(R)$, si indichi con AB il prodotto delle matrici A e B definito riga per colonna. Dimostrare che $(\mathcal{M}_n(R), +, \cdot)$ è un anello unitario. È commutativo? È un dominio di integrità? È un campo?