Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2012-2013
AL110 - Algebra 1
Esercitazione n.7 - 28 Novembre 2012
Antonio Cigliola

Esercizio 1. Si consideri su $\mathbb{R}$ l'ordinamento naturale $\leqslant$ e sia $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(i) Rappresentare graficamente l'insieme degli elementi di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ che sono maggiori, minori, non confrontabili con $(x,\, y)$ rispetto all'ordinamento lessicografico di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ indotto da $\leqslant$.

(ii) Rappresentare graficamente l'insieme degli elementi di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ che sono maggiori, minori, non confrontabili con $(x,\, y)$ rispetto all'ordinamento prodotto cartesiano di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ indotto da $\leqslant$.

Esercizio 2. Sia data la permutazione $\sigma = (156)(68)(543)(1374) \in S_8$.

(i) Scrivere σ come prodotto di trasposizioni in almeno due modi distinti.

(ii) Decomporre σ nel prodotto di cicli disgiunti.

(iii) Determinare l'ordine di σ.

(iv) Calcolare σ^2 e σ^4.

(v) Data $\tau = (73)(36) \in S_8$, calcolare $\sigma\tau$ e $\tau^{-1}\sigma^{-1}$.

Esercizio 3. Sia G un gruppo. Siano $g, h \in G$. Dimostrare che l'inverso di gh in G è l'elemento $h^{-1}g^{-1}$.

Esercizio 4. Siano dati gli interi $n > 1$ e $1 < k \leqslant n$. Dato il ciclo $\sigma = (a_1 a_2 \dots a_k) \in S_n$ di lunghezza k, verificare che una decomposizione di σ come prodotto di trasposizioni è data da:

$$(a_1 a_2 \dots a_k) = (a_1 a_k)(a_1 a_{k-1}) \dots (a_1 a_2).$$

Esercizio 5. Scrivere le seguenti permutazioni di S_9 come prodotto di trasposizioni e come prodotto di cicli disgiunti:

(i) (143)(2531)(24);

(ii) (176)(914);

(iii) (23)(21)(24);

(iv) (13579)(2468);

(v) (1653)(4368)(879);

(vi) (13)(1435)(7986)(123).

Esercizio 6. Siano date le permutazioni di S_{10}: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 5 & 7 & 9 & 8 & 10 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $\tau = (23)$. Trovare la decomposizione in cicli disgiunti di σ, τ, $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, σ^{-1} e $\sigma^3\tau^5$.