

Università degli studi Roma Tre  
Corso di laurea in Matematica A.A. 2012-2013  
AL110 - Algebra 1  
Esercitazione n.4 - 25 Ottobre 2012  
Antonio Cigliola

**Esercizio 1.** Calcolare  $(1 + i)^{86}$ .

**Esercizio 2.** Calcolare le radici quarte dell'unità in  $\mathbb{C}$ .

**Esercizio 3.** Calcolare le radici seste dell'unità in  $\mathbb{C}$ .

**Esercizio 4.** Calcolare le radici ottave dell'unità in  $\mathbb{C}$ .

**Esercizio 5.** Calcolare le radici terze di  $2i$  in  $\mathbb{C}$ .

**Esercizio 6.** Trovare i numeri complessi  $z$  tali che:

(i)  $z^2 + z + 1 = 0$ ;

(ii)  $z^2 + i\bar{z} = 1$ ;

(iii)  $z^3 = |z^2|$ ;

(iv)  $z^6 + z^3 + 1 = 0$ ;

(v)  $z^3|z^2| - \bar{z}^2 = 0$ .

**Esercizio 7.** Sia  $z \in \mathbb{C}$ . Verificare che se  $|z| = 1$ , si ha che  $\left| \frac{3z-i}{3+iz} \right| = 1$ .

**Esercizio 8.** Trovare tutte le coppie  $(z, w) \in \mathbb{C}^2$  tali che  $\bar{z}^2 - w^2 = -1$  e  $z - \bar{w}^2 = 0$ .

**Esercizio 9.** (i) Dimostrare non esiste alcun numero complesso  $z$  della forma  $ai$ , con  $a \in \mathbb{R}$ , tale che  $\bar{z} + z = |z|^2 + 1$ .

(ii) Trovare i numeri complessi  $z$  per cui  $\bar{z} + z = |z|^2 + 1$ .

**Esercizio 10.** Si consideri l'equazione diofantea

$$\alpha X + (\alpha + 1)Y = 2012. \quad (*_{\alpha})$$

(i) Decidere della risolubilità di  $(*_{\alpha})$  al variare di  $\alpha \in \mathbb{Z}$ .

(ii) Provare che per ogni  $m \in \mathbb{Z}$  e per ogni  $\alpha \in \mathbb{Z}$  esiste una coppia  $(x_0, y_0)$ , soluzione di  $(*_{\alpha})$ , tale che  $m = x_0 + y_0$ .