

Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2012-2013
AL110 - Algebra 1
Esercitazione n.2 - 10 Ottobre 2012
Antonio Cigliola

Esercizio 1. Provare che l'applicazione $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$ definita nel seguente modo:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} - 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

è biiettiva e determinarne l'inversa.

Esercizio 2. * Siano $a, b, c,$ e d numeri interi con $c \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$. Provare che l'applicazione $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ definita nel seguente modo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax+b}{cx+d} & \text{per } x \neq -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & \text{per } x = -\frac{d}{c} \end{cases}$$

è invertibile e determinarne l'inversa.

Esercizio 3. Siano S e T insiemi non vuoti e sia $f : S \rightarrow T$ un'applicazione. Siano infine X ed X' sottoinsiemi di S . Provare che:

- (i) $f(X \cap X') \subseteq f(X) \cap f(X')$;
- (ii) * $f(X \cup X') = f(X) \cup f(X')$;
- (iii) * $f(X \setminus X') \supseteq f(X) \setminus f(X')$.

Esercizio 4. Mostrare con un esempio che esiste un'applicazione f il cui dominio contiene due sottoinsiemi X ed X' tali che $f(X \cap X') \not\subseteq f(X) \cap f(X')$.

Esercizio 5. * Siano S e T insiemi non vuoti e sia $f : S \rightarrow T$ un'applicazione. Provare che f è iniettiva se e solo se $f(X \cap X') = f(X) \cap f(X')$, per tutti i sottoinsiemi X ed X' di S .

Esercizio 6. * Siano S e T insiemi non vuoti e sia $f : S \rightarrow T$ un'applicazione. Si consideri l'applicazione immagine di f definita nel modo seguente $\bar{f} : \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathcal{P}(T)$ tale che per ogni $X \subseteq S$: $\bar{f}(X) = f(X)$. Provare che:

- (i) f è iniettiva se e solo se \bar{f} è iniettiva;
- (ii) f è suriettiva se e solo se \bar{f} è suriettiva;
- (iii) f è biiettiva se e solo se \bar{f} è biiettiva.

Se f è biiettiva, determinare \bar{f}^{-1} .