Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2012/2013
AL110 - Algebra 1
Appello C
11 Giugno 2013

*Cognome*____________________ *Nome*_________________________

*Numero di matricola*____________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. Non è consentito l'uso di libri, appunti. E' consentito l'uso della calcolatrice.

1. **(4 pt)**

   (a) Utilizzando il principio di induzione, provare che per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha che:

   $$\sum_{1}^{n} k \cdot 3^k = \frac{3}{4}[(2n-1)3^n + 1]$$

   (b) Utilizzando il principio di induzione, provare che se a è un numero intero dispari, allora per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha che

   $$a^{2^n} \equiv 1 \pmod{2^{n+2}}$$

2. **(5 pt)** Nell'insieme $\mathbb{C}^\star$ dei numeri complessi non nulli si consideri la seguente relazione ρ:

$$\alpha\rho\beta \Longleftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}^\star.$$

(a) Verificare che ρ è una relazione di equivalenza in $\mathbb{C}^\star$.

(b) Descrivere esplicitamente:

$$[-7]_\rho,\ [i\sqrt{2}]_\rho,\ [i+1]_\rho,\ [i-1]_\rho$$

(c) Descrivere geometricamente le classi di equivalenza di ρ.

3. **(5 pt)** Provare che per ogni numero intero a si ha che:

   (a) $a^{21} \equiv a \pmod{15}$;

   (b) $a^{7} \equiv a \pmod{42}$;

   (c) $a^{13} \equiv a \pmod{3 \cdot 7 \cdot 13}$;

   (d) $a^{9} \equiv a \pmod{30}$.

4. **(5pt)** Sia X l'insieme di tutte le applicazioni di $\mathbb{R}$ nell'insieme con due elementi $\{0,1\}$, cioè $X = \{0,1\}^{\mathbb{R}}$. In X si consideri l'operazione $*$ definita ponendo, per ogni $f,\ g \in X$

$$(f * g)(r) = f(r) + g(r) - f(r)g(r)$$

per ogni $r \in \mathbb{R}$.

(a) Provare che $*$ è associativa.

(b) Verificare che nel semigruppo $(X, *)$ si ha $f^2 = f$ per ogni $f \in X$.

(c) Stabilire se esiste in $(X, *)$ un elemento neutro rispetto a $*$.

(d) Trovare gli eventuali elementi invertibili in $(X, *)$.

(e) Stabilire se $(X, *)$ è un gruppo.

5. **(5 pt)** Siano $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$ insiemi (parzialmente) ordinati. La relazione $\leq$ definita sul prodotto $X \times Y$ ponendo

$$(x, y) \leq (x', y') \iff (x <_X x') \quad \vee \quad (x = x' \ \wedge \ y \leq_Y y')$$

è una relazione d'ordine (parziale) su $X \times Y$, detto *prodotto lessicografico* di $\leq_X$ e $\leq_Y$.

   (a) Si dimostri che se $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$ sono totalmente ordinati, allora $(X \times Y, \leq)$ è totalmente ordinato.

   (b) Se $x_0 \in X$ ed $y_0 \in Y$ sono i massimi di $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$ rispettivamente, stabilire cosa è l'elemento (x_0, y_0) per $(X \times Y, \leq)$.

   (c) Rappresentare tramite un diagramma lineare (o di Hasse) l'insieme (parzialmente) ordinato $(X \times Y, \leq)$, elencandone elementi minimali o massimali nei seguenti casi :

      i. $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divide } 6\}$, $\leq_X$ è l'ordinamento naturale e $\leq_Y$ è l'ordinamento per divisibilità.

      ii. X è l'insieme delle parti dell'insieme $\{0, 1\}$, Y è l'insieme delle parti dell'insieme $\{2\}$, $\leq_X$ e $\leq_Y$ sono l'inclusione insiemistica in entrambi i casi.

6. **(6 pt)**

(a) Decomporre il polinomio $f(X) = 3X^4 + 24X^2 - 6 \in \mathbb{Z}[X]$ in fattori irriducibili in $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$ e $\mathbb{Z}[X]$.

(b) Decomporre il polinomio $g(X) = X^8 + 1 \in \mathbb{Z}[X]$ in fattori irriducibili in $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$ e $\mathbb{Z}[X]$.

(c) Decomporre il polinomio $h(X) = X^4 + \overline{4} \in \mathbb{Z}_7[X]$ in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}_7[X]$.