Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2012/2013
AL110 - Algebra 1
Appello B
12 Febbraio 2013

*Cognome*___________________ *Nome*________________________

*Numero di matricola*___________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. Non è consentito l'uso di libri, appunti. E' consentito l'uso della calcolatrice.

1. **(5 pt)**

   (a) Sia α un numero razionale positivo. Verificare che se $\alpha = \frac{m}{n}$ con $m,\ n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, allora il numero

   $$\frac{|m+n|}{\mathrm{MCD}(m,n)}$$

   dipende soltanto da α e non dalla scelta di un suo rappresentante.

   (b) Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathbb{Q}^+$ definita da:

   $$\alpha = \frac{m}{n} \longmapsto \frac{|m+n|}{\mathrm{MCD}(m,n)}$$

   i. Stabilire se l'applicazione f è iniettiva.
   ii. Descrivere $\mathtt{Im}(f)$.

2. **(6 pt)** In $\mathbb{C} - \{0\}$ si consideri la seguente relazione ρ:

$$\alpha\rho\beta \Leftrightarrow \alpha|\beta| = \beta|\alpha|, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

(a) Verificare che ρ è una relazione di equivalenza in $\mathbb{C} - \{0\}$.

(b) Descrivere esplicitamente:

$$[1]_\rho,\ [2i]_\rho,\ [-3]_\rho,\ [-4i]_\rho,\ [i+1]_\rho.$$

(c) Descrivere geometricamente le classi di equivalenza di ρ.

(d) Trovare una applicazione f di dominio $\mathbb{C} - \{0\}$ tale che la relazione nucleo di f coincide con ρ.

3. **(4 pt)** Determinare tutte le eventuali soluzioni del seguente sistema di congruenze lineari:

$$\begin{cases} 8X \equiv 10 \pmod{13} \\ 10X \equiv 20 \pmod{49} \\ 13X \equiv 17 \pmod{22} \end{cases}$$

4. **(6 pt + 3 FAC)** In $\mathbb{Q}[X]$ si consideri la seguente relazione binaria $\trianglelefteq$:

$$f(X) \trianglelefteq g(X) \iff \text{per ogni } j = 0,\, 1,\, 2 \text{ si ha che } f(j) \leqslant g(j)$$

con $f(X),\ g(X) \in \mathbb{Q}[X]$.

(a) Verificare che $(\mathbb{Q}[X],\ \trianglelefteq)$ non è un insieme ordinato.

(b) Sia
$$A = \{f(X) \in \mathbb{Q}[X] \quad | \quad 1 \leqslant \deg(f(X)) \leqslant 2\}$$
Verificare che $(A,\ \trianglelefteq)$ è un insieme ordinato e stabilire se è totalmente ordinato.

(c) Si consideri il seguente sottoinsieme di A:
$$B = \left\{X^2 - 3X + 2;\ X - 2;\ (X - 1)^2;\ X - 1;\ X\right\}$$
Rappresentare $(B,\ \trianglelefteq)$ attraverso un diagramma lineare e determinare, se esistono, elementi massimali e minimali, il massimo ed il minimo di B.

(d) Sia $C = \{X - r \mid r \in \mathbb{Q}\}$. Verificare che C è una catena.

(e) (FAC.)

   i. Determinare l'estremo superiore di B in $(A,\ \trianglelefteq)$.

   ii. Dimostrare che C non ha maggioranti in $(A,\ \trianglelefteq)$.

5. **(5pt)** Sia $\mathbb{Z}^\star := \mathbb{Z} - \{0\}$. Nell'insieme $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}^\star$ si consideri l'operazione $\odot$ definita ponendo, per ogni $x, x' \in \mathbb{Q}$, $m, m' \in \mathbb{Z}^\star$

$$(x, m) \odot (x', m') = (x + mx', mm')$$

   (a) Provare che $\odot$ è associativa.
   (b) Provare che esiste in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}^\star$ un elemento neutro rispetto a $\odot$.
   (c) Calcolare gli elementi invertibili in $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}^\star, \odot)$.
   (d) Stabilire se $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}^\star, \odot)$ è un gruppo.

6. **(4 pt)**

(a) Decomporre il polinomio $f(X) = 15X^4 + 240 \in \mathbb{Z}[X]$ in fattori irriducibili in $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$ e $\mathbb{Z}[X]$.

(b) Decomporre il polinomio $g(X) = X^4 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$ in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}_3[X]$.