

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2011/2012
TN410 - Introduzione alla teoria dei numeri
Esercitazione 2
23 marzo 2012

1. Quali tra le seguenti funzioni aritmetiche sono moltiplicative? Quali totalmente moltiplicative? Motivare le risposte.

(a) $f(n) = \frac{n}{2}$;

(b) $f(n) = n^n$;

(c) $f(n) = \log n$;

(d) $f(n) = n + 1$;

(e) $f(n) = \frac{1}{n}$.

2. Provare che se n è un intero positivo, allora:

$$\varphi(2n) = \begin{cases} \varphi(n) & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 2\varphi(n) & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

3. Sia n un intero positivo. Provare che:

(a) $\varphi(3n) = 3\varphi(n)$ se e solo se 3 divide n ;

(b) $\varphi(3n) = 2\varphi(n)$ se e solo se 3 non divide n ;

(c) $\varphi(n) = \frac{n}{2}$ se e solo se $n = 2^k$ per qualche $k \geq 1$.

4. Dimostrare che se m e k sono interi positivi, allora

$$\varphi(m^k) = m^{k-1}\varphi(m)$$

5. Sia n un intero positivo. Provare che:

(a) $\tau(n)$ è un intero dispari se e solo se n è un quadrato.

(b) $\sigma(n)$ è un intero dispari se e solo se n è un quadrato o il doppio di un quadrato perfetto.