Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2010/2011
TN410 - Introduzione alla teoria dei numeri
Tutorato 5 (28 aprile 2011)
Giacomo Milizia

1. Risolvere le seguenti congruenze quadratiche:
   (a) $X^2 - 3X + 2 \equiv 0 \pmod{15}$;
   (b) $X^2 + 3X + 1 \equiv 0 \pmod{21}$;
   (c) $X^2 + 2X - 3 \equiv 0 \pmod{21}$;
   (d) $5X^2 + 6X + 1 \equiv 0 \pmod{23}$.

2. Provare che la congruenza quadratica $6X^2 + 5X + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ ha soluzioni per ogni primo p, sebbene l'equazione $6X^2 + 5X + 1 = 0$ non abbia soluzioni in $\mathbb{Z}$.

3. Studiare il gruppo dei residui quadratici Q_n per ogni $n \leqslant 15$.

4. Sapendo che 2 è una radice primitiva dell'unità modulo 19, elencare gli elementi di Q_{19}.

5. Siano p e q numeri primi dispari con $q = 4p + 1$. Provare che se a è un non-residuo quadratico di q, allora a è una radice primitiva dell'unità modulo q oppure $\mathrm{ord}_q\, a = 4$.

6. Siano p un primo dispari ed *a un residuo quadratico* di p. Provare che:
   (a) a non è una radice primitiva mod p;
   (b) l'intero $p - a$ è un residuo quadratico o un non-residuo quadratico di p rispettivamente se $p \equiv 1 \pmod 4$ 0 $p \equiv 3 \pmod 4$;
   (c) Se $p \equiv 1 \pmod 4$, allora $x \equiv \pm a^{(p+1)/4} \pmod p$ sono le soluzioni della congruenza $X^2 \equiv a \pmod p$.

7. Se $p = 2^k + 1$ è primo, provare che ogni non-residuo quadratico di p è una radice primitiva di p. (Sugg. : applicare il criterio di Eulero)

8. Sia p un primo dispari ed a un intero positivo $\leqslant p - 1$. Dimostrare che se $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$, allora $\sum_{d|a} d^{\frac{p-1}{2}} \equiv 0 \pmod{p}$.

9. Sia p un primo dispari. Dimostrare che il prodotto dei residui quadratici di p in un assegnato sistema ridotto di residui modulo p è congruente modulo p a $-\left(\frac{-1}{p}\right)$.

10. Trovare il valore di $\left(\frac{7}{11}\right)$ usando il criterio di Eulero ed usando il lemma di Gauss.

11. Usando il lemma di Gauss, calcolare i seguenti simboli di Legendre:

$$\left(\frac{7}{13}\right), \quad \left(\frac{5}{19}\right), \quad \left(\frac{11}{23}\right).$$

12. Determinare per quali primi dispari p si ha che $-2 \in Q_p$.

13. Trovare il valore dei seguenti simboli di Legendre:

$$\left(\frac{2}{7}\right), \quad \left(\frac{3}{23}\right), \quad \left(\frac{3}{31}\right), \quad \left(\frac{6}{11}\right), \quad \left(\frac{-6}{17}\right), \quad \left(\frac{-16}{337}\right).$$