

Università degli Studi Roma Tre  
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2010/2011  
TN410 - Introduzione alla Teoria dei Numeri  
Alfonso Pesiri  
Esercitazione del 28/04/2011

**Esercizio 1**

Mostrare che l'insieme delle funzioni aritmetiche  $f$  tali che  $f(1) \neq 0$  forma un gruppo abeliano rispetto al prodotto di Dirichlet.

**Esercizio 2**

Date  $f, g$  funzioni aritmetiche moltiplicative, mostrare che  $(f * g)$  è funzione aritmetica moltiplicativa.

**Esercizio 3**

Mostrare che valgono le seguenti uguaglianze:

- (a)  $\mu * \mathbb{I} = u$ ;
- (b)  $\tau * \mu = \mathbb{I}$ ;
- (c)  $\sigma * \mu = e$ ;
- (d)  $e * \mu = \varphi$ ;
- (e)  $\varphi * \mathbb{I} = e$ .

**Esercizio 4**

Mostrare che se  $f$  è funzione aritmetica totalmente moltiplicativa, allora  $f(1) = 1$  ed  $f^{-1} = \mu \cdot f$ .

Dedurre da ciò le seguenti uguaglianze:

- (a)  $e^{-1} = \mu \cdot e$ ;
- (b)  $\varphi^{-1} = \mu \cdot e * \mathbb{I}$ ;
- (c)  $\sigma^{-1} = \mu \cdot e * \mu$ ;
- (d)  $\tau^{-1} = \mu * \mu$ .

**Esercizio 5**

Mostrare che valgono le seguenti uguaglianze:

- (a)  $\sum_{d|n} \sigma(d) = \sum_{d|n} \frac{n}{d} \cdot \tau(d)$ ;
- (b)  $\sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) \cdot \tau(d) = \sum_{d|n} d$ ;
- (c)  $\sum_{d|n} \frac{n}{d} \cdot \sigma(d) = \sum_{d|n} d \cdot \tau(d)$ .