Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2010/2011
TN410 - Introduzione alla Teoria dei Numeri
Alfonso Pesiri
Esercitazione del 24/03/2011

Esercizio 1
Mostrare che la congruenza in due incognite $aX + bY \equiv c(n)$ è risolubile se e solo se $(a, b, n) \mid c$ e che in tal caso la congruenza ammette dn soluzioni, con $d := (a, b, n)$. Ricavare la formula per la soluzione generale della congruenza data. Infine, trovare le soluzioni intere, se esistono, delle seguenti congruenze:

(a) $2X + 4Y \equiv 6(8)$;

(b) $2X + 3Y \equiv 1(7)$;

(c) $2x + 2Y \equiv 3(4)$.

Esercizio 2
Si consideri il seguente sistema di congruenze in due incognite:

$$\begin{cases} aX + bY & \equiv e(n) \\ cX + dY & \equiv f(n) \end{cases}$$

Sia poi $\Delta := ad - bc$. Mostrare che se $(\Delta, n) = 1$ allora il sistema è risolubile ed ammette un'unica soluzione del tipo

$$\begin{cases} X & \equiv \Delta^\star \quad (de - bf)(n) \\ Y & \equiv \Delta^\star \quad (af - ce)(n) \end{cases}$$

dove $\Delta^\star$ denota l'inverso moltiplicativo di Δ modulo n.

Esercizio 3
Trovare, al variare di λ in $[0, 4]$, tutte le soluzioni intere del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 4X + \lambda Y & \equiv 2(5) \\ 2X + 3Y & \equiv 3(5) \end{cases}$$

Esercizio 4
Dimostrare che valgono le seguenti proprietà relative alla funzione φ di Eulero:

(a) $\varphi(n) = n \cdot \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$;

(b) $\varphi(n^2) = n \cdot \varphi(n)$;

(c) $\varphi(n)$ è pari se $n > 2$;

(d) $\varphi(3n) = 3 \cdot \varphi(n)$ se $3 \mid n$;

(e) $\varphi(3n) = 2 \cdot \varphi(n)$ se $3 \nmid n$;

(f) $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$ se $(m, n) = 1$.